$$V_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

1) بين ان المتتالية (V_n) متقاربة نحو $\frac{1}{2}$.

2) ا) بين ان كل من الدوال $f : x \mapsto x - \sin x$

$h : x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$ ، $g : x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$

تأخذ قيم موجبة او معدومة على المجال $[0, +\infty[$. (استعمل تغيرات كل دالة)

ب) تحقق انه من اجل كل $n \geq 1$ يكون $1^3 + 2^3 + \dots n^3 \leq n^4$

ثم استنتج من (ا) ان $V_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq U_n \leq V_n$ من اجل كل $n \geq 0$

جـ) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

---

39 - (U_n) متتالية معرفة على $I\!N$ بـ $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{\sqrt{(U_n - 1)^2 + 1}} + 1$.

1) تحقق انه من اجل كل $n \geq 0$ يكون $U_n \rangle 1$

ثم برهن أن المتتالية (U_n) متناقصة.

3) برر تقارب المتتالية (U_n).

4) احسب الخمسة الحدود الأولى (قيم دقيقة) ما هو التخمين فيما يخص عبارة U_n ؟

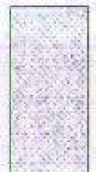
5) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟

الدرس 7

الدَّوالُ الأصْلِيَّةُ وحِسَابُ التكامُلاتِ

1 - مفهوم التكامل على مجال

1-1 تكامل دالة درجية



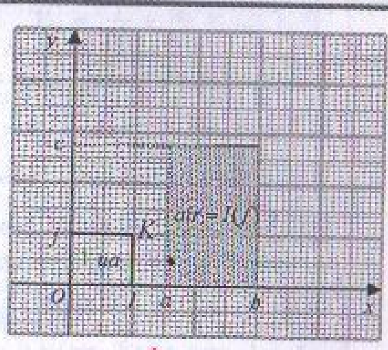
نقول ان f دالة درجية على المجال $[a, b]$ عندما نستطيع إيجاد تقسيم لـ $[a, b]$ مشكل من الأعداد الحقيقية $x_0 = a$ ، x_1 ، x_2 ، ... ، $x_n = b$ بحيث $x_0 \langle x_1 \langle x_2 \langle \dots \langle x_n$ و بحيث الدالة f ثابتة على كل مجال من الشكل $]x_{i-1}, x_i[$ حيث $1 \leq i \leq n$.

حالة دالة ثابتة على $[a, b]$

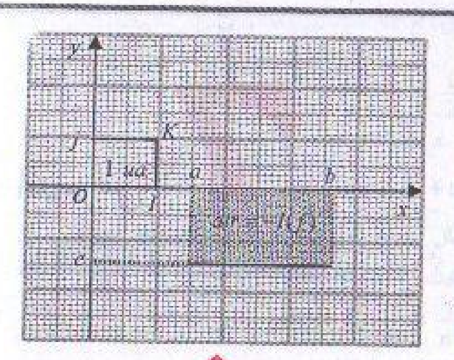
f دالة معرفة على مجال $[a, b]$ بحيث من اجل كل x من $]a, b[$ لدينا $f(x) = c$.

القيمتان $f(a)$ و $f(b)$ يمكن ان تكونا مختلفتين عن العدد c .

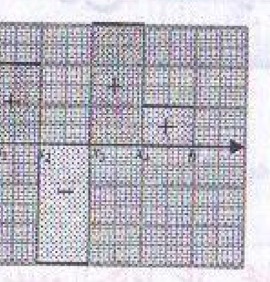
بالتعريف تكامل الدالة f على المجال $[a, b]$ هو العدد الحقيقي $I(f)$ بحيث $I(f) = (b - a) \times c$



لما $0 \langle c$ تكامل الدالة f هو مساحة المستطيل الملون.وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OIKJ$



لما $c \langle 0$ تكامل الدالة f هو عكس مساحة المستطيل الملون.



حالة دالة درجية على المجال $[a,b]$

إذا كان من أجل كل x من $]x_{i-1}\ ,\ x_i[$ لدينا $f(x)=c_i$ فإن تكامل f على $[a,b]$ هو العدد $I(f)$ المعرف بـ:

$$I(f)=(x_1-x_0)\,c_1+(x_2-x_1)\,c_2+\ldots+(x_n-x_{n-1})\,c_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,c_i$$

التكامل $I(f)$ على المجال $[a,b]$

نرمز له بـ $\int_a^b f(t)\,dt$ و الذي يقرأ تكامل من a إلى b لـ $f(t)$ تفاضل t .

ملاحظة

بما أن المتغير t أبكم نستطيع استبداله بأي متغير آخر و عليه :

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(u)\,du=\ldots\ldots$$




مثال -

g دالة درجية معرفة على المجال $[-2\ ,\ 3]$ بـ:

$$\begin{cases} g(x)=2 & ,\ 0 \geq x \geq -2 \\ g(x)=-3 & ,\ 1 \geq x \geq 0 \\ g(x)=1 & ,\ 3 \geq x > 1 \end{cases}$$

(γ_g) منحناها في معلم متعامد و متجانس

لنحسب $I(g)$

$$I(g)=(0+2)\times 2+(1-0)\times(-3)+(3-1)\times 1$$
$$=+4-3+3=4$$

1 - 2 تكامل دالة مستمرة

حصر مساحة

مثال -

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0,1]$ بـ $f(x)=x^2$ و (γ) قوسا من القطع المكافئ (ρ) المثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

نريد تعيين حصر لمساحة حيزمن المستوى تحت المنحني الممثل للدالة f المحدد بالقوس (γ) و محور الفواصل (xx') و المستقيم ذي المعادلة $x=1$ و لتكن $\mathcal{A}$.

1) نقوم بتقسيم المجال $[0,1]$ إلى مجالين لهما نفس الطول 0,5 .

على المجال $[0\,,0{,}5]$ المساحة التي نبحث عنها محصورة بين 0 و مساحة المستطيل $AONA'$ و على المجال $[0{,}5\,,1]$ المساحة التي نبحث عنها محصورة بين مساحتي المستطيلين $ABB''A'$ و $ABB'M$.

اعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ على المجال $[0,1]$.

2) نقوم بتقسيم المجال $[0,1]$ إلى ثلاثة مجالات طول كل منها $\frac{1}{3}$ و عليه فالمساحة التي نبحث عنها محصورة بين مساحتي المستطيلين $AA''NM$ و $B'BNM$ على المجال $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$

- اعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ ، ثم قارنه مع الحصر المحصل عليه في السؤال 1.

3) نقسم المجال $[0,1]$ إلى n مجال وطول كل منها $\frac{1}{n}$

و لنعتبر المجال $I=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ مع k عدد طبيعي محصور بين 0 و $n-1$.

أ) اعط حصرا لمساحة حيزمن المستوي تحت المنحني الممثل للدالة f على I بدلالة n و k .

ب) اعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ مبينا أن $\mathcal{A}$ محصورة بين متتاليتين (U_n) و (V_n)

بحيث $V_n \ge \mathcal{A} \ge U_n$ اوجد عبارتهما.

(يعطى $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

جـ) احسب $\lim_{n\to+\infty} V_n$ و $\lim_{n\to+\infty} U_n$ ماذا تستنتج بالنسبة إلى $\mathcal{A}$ ؟

✓ الحل

1) مساحة $(AOA'N)$ تساوي $0,5\times f(0,5)$ ومنه :

$0,5\times f(0,5)\ge \mathcal{A}_0\ge 0$ ... (1)

مساحة $(ABB'M)$ تساوي $0,5\times f(1)$ ومنه :

$0,5\times f(1)\ge A_1\ge 0,5\times f(0,5)$ ... (2)

بجمع طرفي (1) و (2) نجد $0,5(f(0,5)+f(1))\ge \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1\ge 0,5\times f(0,5)$

اي $0,5((0,5)^2+1^2)\ge \mathcal{A}\ge 0,5\times(0,5)^2$ بالحساب نجد $0,625\ge\mathcal{A}\ge 0,125$.

2) مساحة $(OMAA')$ تساوي $\frac{1}{3}\times f(\frac{1}{3})$ ومنه $\frac{1}{3} f(\frac{1}{3})\ge\mathcal{A}_0\ge 0$ ... (1).

مساحة المستطيل $(MNBB')$ تساوي $\frac{1}{3}\times f(\frac{2}{3})$ ومنه:

$\frac{1}{3} f\left(\frac{2}{3}\right)\ge\mathcal{A}_1\ge\frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right)$ .....(2).

مساحة المستطيل $(NPDD')$ تساوي $\frac{1}{3}\times f(1)$ ومنه:

$\frac{1}{3} f(1)\ge\mathcal{A}_2\ge\frac{1}{3} f\left(\frac{2}{3}\right)$ .....(3).

بجمع حدود التباينات (1) و (2) و (3) نجد:

$$\frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3} f\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3} f(1)\ge \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2\ge \frac{1}{3} f(0)+\frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3} f\left(\frac{2}{3}\right)$$

اي $\left[f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)\right]\ge\mathcal{A}\ge\frac{1}{3}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

بعد الحساب نجد $\frac{14}{3^3}\ge\mathcal{A}\ge\frac{5}{3^3}$ اي $0,51\ge\mathcal{A}\ge 0,18$.

من السؤالين (1) و (2) نلاحظ ان التقسيم الثاني أعطى لنا حصرا أفضل من الحصر الحصل عليه في السؤال (1) و عليه كلما كانت التقسيمات كثيرة كان حصر المساحة $\mathcal{A}$ ادق.

3) أ) نرمز بـ $\mathcal{A}_k$ إلى مساحة حيزمن المستوي تحت المنحني الممثل للدالة f على المجال I ، هذه المساحة محصورة بين مساحة المستطيلين $F_1F_1'F_2F_2'$ و $F_2F_2'F_3F_3'$.

مساحة $(F_1F_1'F_2F_2')$ تساوي $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)$

مساحة $(F_2F_2'F_3F_3')$ تساوي $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

إذن $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\ge\mathcal{A}_k\ge\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

نضع $g_n(t)=f\left(\frac{k}{n}\right)$ و $h_n(t)=f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

مع k ينتمي إلى $\{0,1,...,n-1\}$ و $t\in\left]\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[$.

ب) $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\ge\mathcal{A}_0\ge\frac{1}{n} f(0)$

$\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)\ge\mathcal{A}_1\ge\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

⋮

$\frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)\ge\mathcal{A}_{n-1}\ge\frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

بجمع حدود المتباينات السابقة طرفا لطرف نجد :

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\ge\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+...+\mathcal{A}_{n-1}\ge\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+...+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

و بما أن $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+..+\mathcal{A}_{n-1}$ فإنه نستنتج :

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+...+\frac{n^2}{n^2}\right]\ge\mathcal{A}\ge\frac{1}{n}\left[\frac{0^2}{n^2}+\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+...+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]$$

$$\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+...+n^2\right]\ge\mathcal{A}\ge\frac{1}{n^3}\left[0^2+1^2+...+(n-1)^2\right]$$

بوضع $U_n=\frac{1}{n^3}\left[0^2+1^2+...+(n-1)^2\right]$ و $V_n=\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+...+n^2\right]$.

تصبح المتباينة السابقة كما يلي $V_n\ge\mathcal{A}\ge U_n$.

$U_n=\frac{1}{n^3}\times\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$ و $V_n=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

U_n هي مساحة حيزمن المستوي تحت المنحني للدالة الدرجية g_n و لتكن $I(g_n)$

V_n هي مساحة حيز من المستوي تحت المنحني للدالة الدرجية h_n و لتكن $I(h_n)$

جـ) $\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\lim_{n\to+\infty}V_n=\lim\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

بما أن $V_n \geq \mathcal{A} \geq U_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{3}$ = $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

فإن حسب نظرية الحصر نستنتج $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$.

يمكننا التأكد من أن (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان و عليه فالمتتاليتان (U_n) و (V_n) متقاربتين نحو نفس النهاية $\ell = \frac{1}{3}$ ، نقول أن هذه النهاية المشتركة ℓ هي تكامل f على المجال $[0,1]$ و نرمز له بـ $\int_0^1 f(t)dt$ و نكتب $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{3}$

تعريف

f دالة مستمرة على $[a,b]$، نتقبل أنه توجد متتاليتين لدالتين درجيتين (g_n) و (h_n) بحيث من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ و من أجل t من $[a,b]$

$h_n(t) \geq f(t) \geq g_n(t)$ ... (1).

المتتاليات $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ ... (2)

نسمي ℓ تكامل f على $[a,b]$ و نكتب $\ell = \int_a^b f(t)dt$

ملاحظة

1) إذا كانت (s_n) و (S_n) متتاليتين لدالتين درجيتين لهما نفس خصائص (g_n) و (h_n) فإن ℓ هي كذلك نهاية $I(s_n)$ و $I(S_n)$

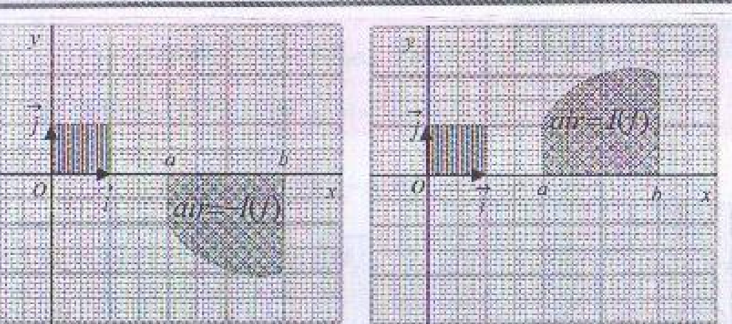
2) تجاور المتتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متعلق بطريقة تقسيم المجال $[a,b]$.

- إذا قسمنا المجال $[a,b]$ إلى 2^n مجال طول كل منها $\frac{b-a}{2^n}$ نتحصل دائما على متتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متجاورتين و هذا مهما كانت طبيعة f . (f رتيبة أو غير رتيبة، موجبة أو سالبة).

- إذا قسمنا المجال $[a,b]$ إلى n مجال طول كل منها $\frac{b-a}{n}$ فالمتتاليتان $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ المحصل عليهما متقاربتان نحو $\int_a^b f(t)dt$ لكن حتى و لو كانت f رتيبة على $[a,b]$ لسنا متأكدين من تجاور هاتين المتتاليتين.

3) إذا كانت الدالة f مستمرة و موجبة فإن العدد $I(f)$ موجب و يعبر عن مساحة حيز من المستوي تحت المنحني الممثل للدالة f .

- إذا كانت f مستمرة و سالبة فإن العدد $I(f)$ يعبر عن نظير مساحة حيز من المستوي تحت المنحني الممثل للدالة f .



تمرين تدريبي 1

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = 2x-1$.

احسب التكاملين التاليين $J = \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(t)dt$ ، $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$

✓ الحل



الدالة f ممثلة بالمستقيم (d) الذي يقطع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ ،ولتكن $B(2,0)$ من محور الفواصل لتكن E نقطة من (d) فاصلتها 2 و ترتيبها 3 . (d) يقطع محور التراتيب في $C(0,-1)$

- على المجال $\left[\frac{1}{2},2\right]$ الدالة f موجبة

ومنه J هو مساحة المثلث ABE والتي تساوي $\frac{9}{4}$ وحدة المساحات وبالتالي $J = \frac{9}{4}$.

- على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ الدالة f سالبة ومنه I نظير مساحة المثلث OCA التي هي $\frac{1}{4}$ ومنه $I = -\frac{1}{4}$.

تمرين تدريبي 2

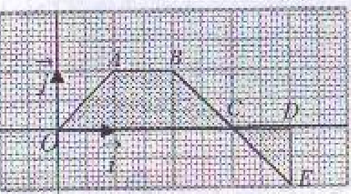
f دالة معرفة على المجال $[0,4]$ بـ

$$\begin{cases} f(x) = x & , x \in [0,1] \\ f(x) = 1 & , x \in [1,2] \\ f(x) = -x+3 & , x \in [2,4] \end{cases}$$

احسب التكاملين I و J التاليين $I=\int_0^3 f(t)\,dt$ ، $J=\int_3^4 f(t)\,dt$

ثم احسب $I+J$.

✓ الحل



- على المجال $[0,3]$ الدالة f موجبة

ومنه I هو مساحة شبه المنحرف $OABC$

والتي تساوي $\frac{(3+1)\times 1}{2}$ أي 2

ومنه $I=2$ وحدة المساحات

- على المجال $[3,4]$ الدالة f سالبة

ومنه J هو نظير مساحة المثلث CED التي تساوي $\frac{1}{2}$ ومنه $J=\frac{-1}{2}$

إذن $I+J=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

❷ - خواص التكامل

مبرهنة

كل دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ تقبل تكاملا على هذا المجال.

1 - 2 تمديد تعريف التكامل إلى a و b كيفيين

عرفنا تكامل دالة درجية او مستمرة على مجال $[a,b]$ مع $b \rangle a$ و الآن إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I ، و كان a و b عددين من I بحيث $a \geq b$

نضع التعريف التالي :

لما $a \rangle b$ تكون $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$ ولما $a=b$ تكون $\int_b^a f(t)\,dt=0$

2 - 2 علاقة شال

مبرهنة

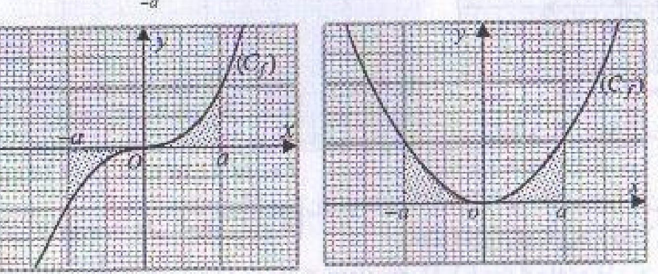
f دالة مستمرة على I . مهما تكن الأعداد الحقيقية a ، b ، c من I

$$\int_a^b f(t)\,dt+\int_b^c f(t)\,dt=\int_a^c f(t)\,dt$$

نتيجة

1) اذا كانت f زوجية على $[-a,a]$ فإن $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=2\int_0^a f(t)\,dt$

2) إذا كان f فردية على $[-a,a]$ فإن $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=0$



الإثبات

حسب علاقة شال لدينا $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=\int_{-a}^{0} f(t)\,dt+\int_0^a f(t)\,dt$

1) إذا كانت f زوجية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt$ ومنه $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=2\int_0^a f(t)\,dt$

2) إذا كانت f فردية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

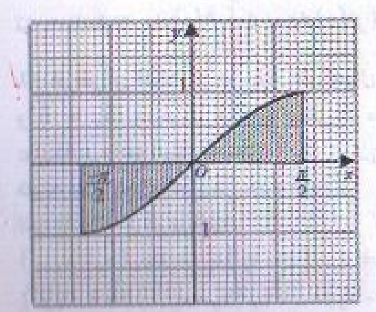
$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt=-\int_0^a f(t)\,dt$

و منه $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=0$

مثال ❶

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sin x$

احسب التكامل $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$



✓ الحل

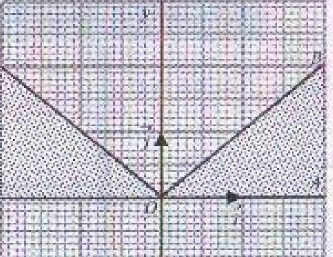
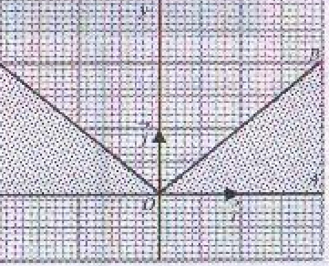
الدالة f فردية على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt=0$.

مثال 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|$

احسب التكامل $I=\int_{-2}^{2} f(t)\,dt$

✓ الحل

الدالة f زوجية على المجال $[-2\ ,\ 2]$

ومنه $I=\int_{-2}^{2} f(t)\,dt=2\int_{0}^{2} f(t)\,dt$

وبما أن f موجبة على المجال $[0\ ,\ 2]$

فإن $\int_{0}^{2} f(t)\,dt$ تساوي مساحة المثلث OAB التي هي 2 وحدة المساحات

وعليه $I=2\int_{0}^{2} f(t)\,dt=2\times 2=4$.

2 - 3 خطية التكامل

مبرهنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال I و λ عدد حقيقي كيفي.
مهما يكن العددان الحقيقيان a و b من I لدينا

$$\int_{a}^{b}(f+g)(t)\,dt=\int_{a}^{b} f(t)\,dt+\int_{a}^{b} g(t)\,dt \quad \text{و} \quad \int_{a}^{b}\lambda f(t)\,dt=\lambda\int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

الإثبات

نثبت المساواة $\int_{a}^{b}\lambda f(t)\,dt=\lambda\int_{a}^{b} f(t)\,dt$ أي $\lambda I(f)=I(\lambda f)$

1) نفرض أن الدالة f درجية على المجال $[a\ ,\ b]$ إذن يوجد تقسيم لـ $[a\ ,\ b]$ مع $x_0=a$ و $x_n=b$ و بحيث من أجل كل x من $]x_{i-1}\ ,\ x_i[$: $f(x)=c_i$ مع $1\le i\le n$
عندئذ من أجل كل x من $]x_{i-1}\ ,\ x_i[$: $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)=\lambda c_i$ و عليه λf ثابتة على كل مجال من هذه المجالات
إذن فالدالة λf درجية.

$$I(\lambda f)=\lambda c_1(x_1-x_0)+\ldots+\lambda c_n(x_n-x_{n-1})$$
$$=\lambda\left[c_1(x_1-x_0)+\ldots+c_n(x_n-x_{n-1})\right]=\lambda I(f)$$

2) نفرض أن f دالة مستمرة على المجال $[a\ ,\ b]$
عندئذ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ توجد دالتان درجيتان g_n و h_n بحيث من أجل كل t من $[a\ ,\ b]$
يكون $h_n(t)\ge f(t)\ge g_n(t)$
و $I(f)$ النهاية المشتركة للمتتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$.

المنحنى الأسفل لـ f و المنحنى الأعلى لـ h

- لما $\lambda\ge 0$ فإنه من أجل كل t من $[a\ ,\ b]$ و كل n من $\mathbb{N}^*$ يكون:
$\lambda h_n(t)\ge\lambda f(t)\ge\lambda g_n(t)$

لنبين أن المتتاليتين $(I(\lambda g_n))$ و $(I(\lambda h_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية بالتعريف تكون $I(\lambda f)$ هي النهاية المشتركة.

بما أن المتتالية $(I(g_n))$ متقاربة نحو $I(f)$ فإن المتتالية $(\lambda I(g_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$. و بما أن g_n و λg_n دالتان درجيتان فإن $I(\lambda g_n)=\lambda I(g_n)$ من أجل كل $n\ge 1$
و بالتالي $(I(\lambda g_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$.
بنفس الكيفية نبين أن $(I(\lambda h_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$
إذن $I(\lambda f)=\lambda I(f)$.

- بضرب المتباينة $h_n(t)\ge f(t)\ge g_n(t)$ بالعدد λ لما $\lambda<0$ نجد $\lambda g_n(t)\ge\lambda f(t)\ge\lambda h_n(t)$ ونبرهن بنفس الكيفية السابقة أن $\lambda I(f)=I(\lambda f)$.

3) لما $a\ge b$ فإنه من التعريف:

$$\int_{a}^{b} f(t)\,dt=-\int_{b}^{a} f(t)\,dt \quad \text{و} \quad \int_{a}^{b}(\lambda f)(t)\,dt=-\int_{b}^{a}(\lambda f)(t)\,dt$$

و حسب النتيجة السابقة $\int_{b}^{a}(\lambda f)(t)\,dt=\lambda\int_{b}^{a} f(t)\,dt$

إذن $\int_{a}^{b}(\lambda f)(t)\,dt=-\int_{b}^{a}(\lambda f)(t)\,dt=-\int_{b}^{a}\lambda f(t)\,dt=\lambda\int_{a}^{b} f(t)\,dt$

أي $I(\lambda f)=\lambda I(f)$

مثال -

f و g دالتان مستمرتان على المجال $[2\ ,\ 7]$ إذا علمت أن:

$I=\int_{2}^{3} f(x)\,dx=-5$ و $J=\int_{7}^{3} f(x)\,dx=3$ و $K=\int_{2}^{7} g(x)\,dx=13$

1) احسب $L=\int_2^7 f(x)\,dx$ و $M=\int_2^7 (f+g)(x)\,dx$ و

$$N=\int_2^7 (4f(x)-5g(x))\,dx$$

ب) نفرض أن $g(x)\geq 0$ على المجال $[2,7]$ و المنحني البياني لـ g متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{9}{2}$. احسب $\int_2^{4,5} g(x)\,dx$.

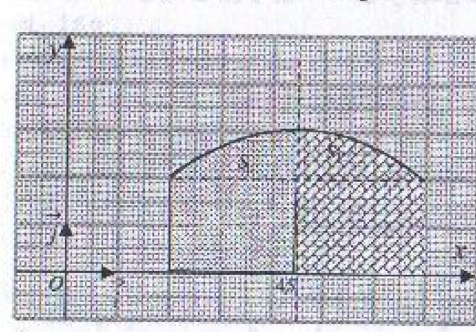
✓ الحل

1) $$L=\int_2^7 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_3^7 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx-\int_7^3 f(x)dx=I-J=-8$$

$$M=\int_2^7 (f+g)(x)dx=\int_2^7 f(x)dx+\int_2^7 g(x)dx=L+K=-8+13=5$$

$$N=\int_2^7 4f(x)dx-\int_2^7 5g(x)dx$$

$$=4\times L-5K=-32-65=-97$$



ب) $S_1=\int_2^{4,5} g(x)dx$

$S_2=\int_{4,5}^{7} g(x)dx$

بما أن المنحني الممثل للدالة g متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x=4,5$
فإن $S_1=S_2$ و $S_1+S_2=13$ ومنه $S_1=\frac{13}{2}$.

2-4 إشارة التكامل و المقارنة

مبرهنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال I ، و ليكن a و b عددين حقيقين من I .

1) إذا كان $a\leq b$ و $f\geq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(t)dt\geq 0$.

2) إذا كان $a\leq b$ و $f\geq g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.

الإثبات

1) رأينا في ما سبق أنه إذا كانت f موجبة على $[a,b]$ فإن $I(f)$ يمثل المساحة و بالتالي فهو موجب إذن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

2) من الفرض $f\geq g$ نستنتج أن $f-g\geq 0$ على المجال $[a,b]$
وعليه $I(f-g)\geq 0$ لكن $I(f-g)=I(f)-I(g)$.

إذن $\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx\geq 0$

ومنه نستنتج $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

مثال .

عين إشارة التكامل $I=\int_0^1 (x^2-1)dx$ و $J=\int_1^2 (x^2-1)dx$

✓ الحل

لتعيين إشارة I نعين إشارة الدالة f المعرفة على $[0,2]$ بـ $f(x)=x^2-1$

- إذا كان $x\in[0,1]$ فإن $f(x)\leq 0$ إذن $\int_0^1 -f(x)dx\geq 0$ وحسب الخطية

$\int_0^1 -f(x)dx=-\int_0^1 f(x)dx$ وعليه نستنتج $\int_0^1 f(x)dx\leq 0$

- إذا كان $x\in[1,2]$ فإن $f(x)\geq 0$ ومنه $\int_1^2 f(x)dx\geq 0$.

2-5 القيمة المتوسطة لدالة - حصر القيمة المتوسطة

مبرهنة 1

f دالة مستمرة على مجال I ، و ليكن a و b عددين حقيقين مختلفين من I ، عندئذ يوجد عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $\int_a^b f(t)dt=(b-a)f(c)$.

العدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f بين a و b

الإثبات

نفرض أن الدالة f متزايدة.

الحالة الأولى $a < b$

- بما أن f متزايدة فإنه من أجل كل x من $[a, b]$ فإن $f(b) \geq f(x) \geq f(a)$

ومنه نستنتج $f(b)(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx \geq f(a)(b-a)$

وبما أن $b-a > 0$ نجد $f(b) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq f(a)$.

- بما أن f متزايدة ومستمرة على $[a, b]$
فإنه يوجد عدد حقيقي c من $[a, b]$
بحيث $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

الحالة الثانية $a > b$

لدينا في هذه الحالة $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

و بما أن $b < a$ فإنه يوجد c محصور بين a و b بحيث $\int_b^a f(x)dx = (a-b)f(c)$

ومنه $\int_a^b f(x)dx = -(a-b)f(c)$ أي $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$

مبرهنة 2

f دالة مستمرة على مجال I، و ليكن m و M عددين حقيقيين مختلفين، و ليكن أيضا a و b عددين حقيقيين من I بحيث $a \leq b$.

إذا كانت $m \leq f(x) \leq M$ على المجال $[a, b]$ فإن $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$

الإثبات

من أجل كل x من $[a, b]$ لدينا،

$m \leq f(x) \leq M$ .... (1)

الدالتان $x \mapsto m$ و $x \mapsto M$ ثابتتان على $[a, b]$

إذن $\int_a^b M\,dt = M(b-a)$ و $\int_a^b m\,dt = m(b-a)$

وبما أن $a \leq b$ و بتكامل المتباينة (1) نحصل على

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

بالقسمة على $(b-a)$ نجد $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$.

نتيجة

f دالة مستمرة على مجال I و ليكن a و b عددين كيفيين من I وليكن M عدد حقيقي موجب.

إذا كانت $|f(x)| \leq M$ على $[a, b]$ أو $[b, a]$

فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a|$

مبرهنة

1) f دالة مستمرة و سالبة على المجال $[a, b]$ عندئذ $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|dx$

2) إذا كانت f تنعدم عند c من $[a, b]$ و $f(x)$ سالبة على $[a, c]$ وموجبة على $[c, b]$

فإن $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b f(x)dx$

الإثبات

1) نضع $f(x) = -g(x)$ حيث $g(x)$ موجبة

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -g(x)dx = -\int_a^b g(x)dx = -\int_a^b |f(x)|dx$.

(لأن $g(x) = -f(x) = |f(x)|$)

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = -\int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b f(x)dx$

ملاحظة

1) إذا كانت f سالبة على مجال I فإن تكامل f على I هو نظير مساحة حيز من المستوي فوق المنحني الممثل للدالة f.

2) إذا غيرت f إشارتها على I نجزئ المجال I إلى مجالات جزئية بحيث الدالة f لها إشارة ثابتة على كل منها ثم نجمع التكاملات المحسوبة على كل مجال.

تمرين تدريبي 1

بين أن 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt \le \frac{\pi}{2}$ ، 2) $0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx \le 2$

✓ الحل

في الحالتين أن الدالتين المعطاة مستمرتان على $\mathbb{R}$ إذن فهما قابلتان للمكاملة على مجال التكامل.

1) من اجل كل t من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ يكون $0 \le \cos t \le 1$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt$ لكن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = 1\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{2}$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt \le \frac{\pi}{2}$

2) بما ان $1 \ge x \ge 0$ فإن $0 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 2x \le 2$ و منه

$$0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx \le \int_0^1 2\, dx$$

لكن $\int_0^1 2\, dx = 2(1-0) = 2$ إذن $0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx \le 2$.

تمرين تدريبي 2

f دالة معرفة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x-1$ و (d) تمثيله البياني في معلم متعامد و متجانس.

أ) احسب التكامل $I=\int_0^2 f(x)dx$ ثم احسب القيمة المتوسطة لـ f على $[0,2]$.

ب) ليكن a عددا حقيقيا بحيث $a \rangle 2$ و M نقطة من (d) ذات الفاصلة a.

احسب $S(a)=\int_2^a f(x)dx$ ثم قارن بين $f(a)$ و $S'(a)$.

✓ الحل

أ) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$

بما أن f سالبة على المجال $[0, 1]$

فإن $\int_0^1 f(x)\, dx$

هو نظير مساحة المثلث OEC التي تساوي $\frac{1}{2}$

ومنه $\int_0^1 f(x)\, dx = -\frac{1}{2}$

بما أن f موجبة على $[1, 2]$ فإن $\int_1^2 f(x)dx$

هي مساحة المثلث ACB و التي تساوي 1

ومنه $\int_1^2 f(x)\, dx = 1$ إذن $I = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0, 2]$ هي M حيث

$$M = \frac{1}{b-a}\int_0^2 f(x)\, dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ب) بما أن f موجبة على $[2, a]$ فإن $\int_2^a f(x)\, dx$ يساوي مساحة شبه المنحرف $AMBM'$

والتي تساوي $\frac{[(a-1)+1](a-2)}{2}$ أي $\frac{a(a-2)}{2}$

إذن $S(a) = \int_2^a f(x)dx = \frac{a(a-2)}{2}$

الدالة S قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $S'(a) = a-1 = f(a)$.

3 - دوال أصلية لدالة

مبرهنة

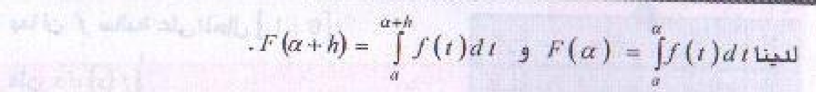
f دالة مستمرة على مجال $I=[a,b]$ يشمل α

مهما يكن العدد الحقيقي x من I، فإن الدالة F المعرفة بـ $F: x \mapsto \int_\alpha^x f(t)dt$

قابلة للاشتقاق على I و لدينا $F'(x)=f(x)$.

الإثبات

نفرض أن f متزايدة تماما و موجبة على مجال $[a,b]$ و ليكن α و $\alpha+h$ عددين حقيقيين من $[a,b]$.



لدينا $F(\alpha)=\int_a^{\alpha} f(t)\,dt$ و $F(\alpha+h)=\int_a^{\alpha+h} f(t)\,dt$.

مساحة الحيز المشطب هي:

$F(\alpha+h)-F(\alpha)$ لما $h>0$ و $F(\alpha)-F(\alpha+h)$ لما $h<0$

لدينا $h\times f(\alpha)\le F(\alpha+h)-F(\alpha)\le h\times f(\alpha+h)$

ومنه نستنتج $f(\alpha)\le \frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}\le f(\alpha+h)$ (في حالة h موجبة)

و $f(\alpha+h)\le \frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}\le f(\alpha)$ (في حالة h سالب)

و بما أن f مستمرة عند α

فإن $\lim_{h\to 0} f(\alpha+h)=f(\alpha)$

و حسب نظرية الحصر

فإن $\lim_{h\to 0}\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}=f(\alpha)$

لكن $\lim_{h\to 0}\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}=F'(\alpha)$

و عليه $F'(\alpha)=f(\alpha)$ من أجل كل α من $[a\,,\,b]$.

بطريقة مماثلة نبين أن $F'(\alpha)=f(\alpha)$ في حالة f متناقصة تماما على I.

3-1 تعريف

كل دالة F قابلة للاشتقاق على مجال I وبحيث انه من أجل كل x من I يكون $F'(x)=f(x)$. هي دالة أصلية للدالة f على مجال I

مثال.

1) f و g دالتان معرفتان على $]0\,,+\infty[$ ب: $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=Ln\,x$

من أجل كل x من $]0\,,+\infty[$ لدينا $g'(x)=f(x)$

ومنه g دالة أصلية للدالة f على $]0\,,+\infty[$.

2) f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ ب $g(x)=\cos x$ و $f(x)=-\sin x$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=f(x)$

ومنه g أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

3-2 العلاقة بين دالتين أصليتين لدالة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال I.

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن الدالة f تقبل ما لا نهاية من الدوال الأصلية.
من الشكل $G(x)=F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي.

الإثبات

لدينا فرضا F قابلة للاشتقاق على I و $F'(x)=f(x)$

-الدالة G قابلة للاشتقاق على I و بحيث $G'=F'=f$

إذن G دالة أصلية لـ f على I.

وبالعكس إذا كانت G دالة أصلية لـ f على I فإن $G'=f=F'$

وعليه $G'-F'=0$ ومنه $G-F$ ثابتة

أي $G(x)-F(x)=k$ ومنه $G(x)=F(x)+k$.

مثال.

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{3}x^3$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=x^2=f(x)$

منه g دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ و بالتالي كل الدوال G المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $G(x)=\frac{1}{3}x^3+k$ حيث k عدد حقيقي هي دوال أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

3-3 الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معينة من أجل قيمة معلومة للمتغير

مبرهنة

x_0 عدد حقيقي من مجال I و y_0 عدد حقيقي كيفي

عندئذ توجد دالة أصلية وحيدة G لـ f على I بحيث $G(x_0)=y_0$.

الإثبات

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن كل دالة أصلية أخرى G لـ f تكتب على الشكل
$G(x)=F(x)+k$ مع k عدد حقيقي و لكون $G(x_0)=y_0$ نجد $F(x_0)+k=y_0$

ومنه $k=y_0-F(x_0)$

إذن k وحيد و بالتالي توجد دالة أصلية و حيدة تحقق الشرط $G(x_0)=y_0$.

مثال.

$f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{3}x^3$

الدوال الأصلية للدالة f هي من الشكل $G(x)=\frac{1}{3}x^3+k$ مع k عدد حقيقي

و الآن نبحث عن الدالة الأصلية التي تحقق $G(1) = 2$.

$G(1) = 2$ تكافئ $\frac{1}{3}\times 1^3+k = 2$ تكافئ $k=\frac{5}{3}$

إذن الدالة الأصلية للدالة f التي تحقق $G(1) = 2$ هي $G(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}$

3 - 4 الدالة الأصليْة لدالة مستمرة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I

عندئذ فالدالة $F : x\mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ المعرفة على I هي الدالة الأصلية الوحيدة لـ f على I

بحيث $F(a)=0$

تمرين تدريبي 1

F دالة معرفة بـ $F(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

أ) عين مجموعة تعريف الدالة F .

ب) احسب $F'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة F ثم عين إشارتها.

✓ الحل

أ) الدالة $t\mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$.

إذن الدالة F معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي $D_F = \mathbb{R}$.

ب) من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $F'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$F'(x)$	+
$F(x)$	↗ (0)

وبما ان $e^{-\frac{x^2}{2}} \rangle 0$ من اجل كل x من $\mathbb{R}$

فإن $F'(x) \rangle 0$

وبالتالي F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

و $F(0)=\int_0^0 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=0$

وعليه إذا كان $x \rangle 0$ فإن $F(x) \rangle 0$

و إذا كان $x \langle 0$ فإن $F(x) \langle 0$

تمرين تدريبي 2

لتكن t دالة معرفة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ بـ $t(x)=\tan x$

أ) عين المشتقة t' للدالة t .

ب) إستنتج الدالة الأصلية للدالة $h : x\mapsto \tan^2 x$ و التي تنعدم من اجل $x=\frac{\pi}{4}$

✓ الحل

أ) الدالة t قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و لدينا $t'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

ب) لدينا $\tan^2 x=t'(x)-1$ ومنه الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \tan^2 x$ هي الدوال $G(x)=t(x)-x+k$ حيث k عدد حقيقي.

$G\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ يكافئ $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}+k=0$ يكافئ $k=\frac{\pi}{4}-1$

إذن الدالة الأصلية المطلوبة هي $G(x)=\tan(x)-x+\frac{\pi}{4}-1$.

4 - حساب الدوال الأصلية

1 - 4 دوال أصلية لدوال شهيرة

- إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على التوالي على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .
- إذا كانت F دالة أصلية لدالة f على I و λ عدد حقيقي فإن λF أصلية لـ λf على I
- نفس النتائج المعروفة حول مشتقات الدوال الشهيرة وبقراءة مقلوبة تعطي لنا الدوال الأصلية كما في الجدول التالي:

الدالة f	الأصلية F	على المجال I =...
a ثابت	ax	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
x^n (n صحيح سالب و يختلف عن -1)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$

$\frac{1}{x}$	$Ln\,x$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan\ x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right[,k\in\mathbb{Z}$

4 - 2 دساتير عامة

معرفة مشتق بعض الدوال المركبة يسمح لنا بتعيين دوال أصلية لدوال أخرى و الجدول التالي يلخص هذه الحالات مع U دالة قابلة للاشتقاق على I.

الدالة f	الأصلية F	ملاحظة
$U'U^n\ (n\in\mathbb{Z}-\{-1\})$	$\frac{1}{n+1}U^{n+1}$	لما $n\langle -1$ من أجل كل x من I $U(x)\neq 0$
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U}$	$U\rangle 0$ على I
$\frac{U'}{U}$	$Ln\lvert U\rvert$	$U\neq 0$
$U'e^U$	e^U	
$x\mapsto U(ax+b)$	$x\mapsto\frac{1}{a}\,g(ax+b)$	g دالة أصلية للدالة U على I

تمرين تدريبي

عين الدالة الأصلية F على I من أجل كل دالة f مستمرة على المجال المعطى

1) $I=\mathbb{R}$ ، $f(x)=(2x-1)^3$ ، ب) $I=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ ، $f(x)=\frac{1}{(2x-1)^3}$

جـ) $I=\mathbb{R}$ ، $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$ ، د) $I=\mathbb{R}$ ، $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{3x^2+3}}$

✔ الحل

نكتب f على شكل αg حيث α عدد حقيقي و g دالة نعرف دالتها الأصلية باستعمال الدساتير العامة و الأشكال التي نبحث عنها هي من الشكل :

$f=\alpha U'U^n$ ، $f=\alpha\frac{U'}{U}$ ، $f=\alpha\frac{U'}{\sqrt{U}}$ ، $f=\alpha U'e^U$

أ) نضع $U(x)=2x-1$ و بالتالي $f(x)=(U(x))^3$

الدالة U قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $U'(x)=2$

إذن $f(x)=\frac{1}{2}\times 2\times(U(x))^3=\frac{1}{2}\times U'(x)\times(U(x))^3$

إذن فالدالة الأصلية على $\mathbb{R}$ هي F حيث $F=\frac{1}{2}\times\frac{U^4}{4}=\frac{U^4}{8}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $F(x)=\frac{1}{8}(2x-1)^4$

ب) نضع $U(x)=2x-1$ وبالتالي $f(x)=\frac{1}{U^3(x)}$

الدالة U قابلة للاشتقاق على $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ و لدينا $U'(x)=2$

وبالتالي $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{(U(x))^3}=\frac{1}{2}\times\frac{U'(x)}{(U(x))^3}=\frac{1}{2}U'(x)\times(U(x))^{-3}$

إذن فالدالة الأصلية على I هي $F=\frac{1}{2}\times\frac{U^{-2}}{-2}=\frac{-1}{4}U^{-2}$

ومن أجل كل x من I يكون $F(x)=\frac{-1}{4(2x-1)^2}$

جـ) نضع $x^2+1=U(x)$

الدالة U قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $U'(x)=2x$

وبالتالي $f(x)=\frac{3}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}=\frac{3}{2}\frac{U'(x)}{U(x)}$

إذن فالدالة الأصلية على $\mathbb{R}$ لـ f هي F حيث $F(x)=\frac{3}{2}Ln\lvert U(x)\rvert$

وبما أن $U(x)\rangle 0$ فإن $F(x)=\frac{3}{2}Ln\,U(x)$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $F(x)=\frac{3}{2}Ln(x^2+1)$

د) نضع $U(x)=3x^2+3$

الدالة U قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $U'(x)=6x$

وبالتالي $f(x)=\frac{5}{6}\times\frac{6x}{\sqrt{3x^2+3}}=\frac{5}{6}\times\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$

إذن فالدالة الأصلية على $\mathbb{R}$ لـ f هي $F=\frac{5}{3}\sqrt{U}$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $F(x)=\frac{5}{3}\sqrt{3x^2+3}$.

⑤ - حساب التكامل

5 - 1 حساب التكامل باستعمال الدالة الأصلية

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و F دالة أصلية كيفية للدالة f على I

و إذا كان a و b عددين حقيقيين من I فإن $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

الإثبات

الدالة $G : x\mapsto \int_a^x f(t)dt$ هي دالة أصلية لـ f على I بحيث $G(a)=0$

إذا كانت F دالة أصلية كيفية لـ f على I فإنه يوجد عدد حقيقي ثابت k بحيث من اجل كل x من I لدينا $G(x)=F(x)+k$

و بما ان $G(a)=0$ فإن $k=-F(a)$

إذن من اجل كل x من I يكون $G(x)=F(x)-F(a)$

و باختيار $x=b$ نحصل على $G(b)=F(b)-F(a)$

اي $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

ملاحظة

نكتب الفرق $F(b)-F(a)$ على الشكل $[F(x)]_a^b$

و كذلك $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

مثال -

1) على $\mathbb{R}$ الدالة $x\mapsto \sin x$ لها دالة أصلية هي $x\mapsto -\cos x$ و منه

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)-(-\cos 0)=1.$$

2) على $\mathbb{R}$ الدالة $x\mapsto x^2+x+1$ لها دالة أصلية هي $x\mapsto \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$ و منه

$$\int_0^1 (t^2+t+1)dt = \left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)-(0)=\frac{11}{6}$$

5 - 2 التكامل بالتجزئة

مبرهنة

U و V دالتان قابلتان للاشتقاق على I بحيث مشتقتاهما U' و V' مستمرتان على I عندئذ من اجل كل عددين حقيقيين a و b من I يكون:

$$\int_a^b U(t)\,V'(t)dt = [U(t)\,V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t)\,V(t)dt$$

الإثبات

الدالة $U\times V$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا $(U\times V)' = U'\times V + U\times V'$

و منه $UV' = (UV)' - U'V$

بما أن الدوال UV' ، $(UV)'$ و $U'V$ مستمرة على I فإن:

$\int_a^b (UV')(t)\,dt = \int_a^b [(UV)'(t)-(U'V)(t)]\,dt$ و حسب خطية التكامل نجد

$$\int_a^b (UV')(t)\,dt = \int_a^b (UV)'(t)\,dt - \int_a^b (U'V)(t)\,dt \quad .... (1)$$

لكن UV هي الدالة الأصلية لـ $(U\times V)'$ على I

إذن $\int_a^b (UV)'(t)dt = [U(t)V(t)]_a^b$

و منه المساواة (1) تكتب على الشكل:

$$\int_a^b (U)(t)\,V'(t)\,dt = [U(t)\,V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t)\,V(t)dt \quad .... (2)$$

تسمى المساواة (2) دستور التكامل بالتجزئة.

مثال -

احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt$

✓ **الحل**

التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt$ من الشكل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} U(t)V'(t)dt$ مع $U(t)=t$ و $V'(t)=\sin t$

و منه نجد $U'(t)=1$ و $V(t)=-\cos t$.

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$ و مشتقتاهما U' و V' مستمرتان على $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$ وحسب دستور المكاملة بالتجزئة نجد :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt = \left[-t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t\,dt = \left[-t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right) - (0\cos 0)\right] - \left[\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) - (-\sin 0)\right] = 1$$

تمرين تدريبي 1

أ) احسب قيمة التكامل $I = \int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

ب) احسب قيمة التكامل $J = \int_0^{1} xe^x\,dx$

✓ الحل

الدساتير العامة لا تسمح لنا بتعيين الدالة الأصلية للدالتين $x \mapsto x\cos x$ و $x \mapsto x e^x$.

أ) نضع $U(x)=x$ و $V'(x)=\cos x$ ومنه نجد $U'(x)=1$ و $V(x)=\sin x$.

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و U' و V' مستمرتان على $\mathbb{R}$

وحسب دستور التكامل بالتجزئة نجد $I = [x\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$$= [x\sin x]_0^{\pi} - [-\cos x]_0^{\pi} = (0)-(0)-[1-(-1)] = -2$$

ب) نضع $U(x)=x$ و $V'(x)=e^x$ ومنه نجد $U'(x)=1$ و $V(x)=e^x$

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و U' و V' مستمرتان على $\mathbb{R}$

إذن حسب دستور التكامل بالتجزئة نجد :

$$J = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 1\times e^x\,dx = \left[x e^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = e-(e-1)=1$$

تمرين تدريبي 2

أوجد دالة أصلية على المجال $]0,+\infty[$ للدالة $f : x \mapsto Ln\,x$

✓ الحل

بما أن الدالة f مستمرة على $]0 , +\infty[$ فإنها تقبل دالة أصلية من الشكل:

$F : x \mapsto \int_1^x Ln\,t\,dt$ و $F(1)=0$ ونكتب $F(x) = \int_1^x 1\times Ln\,t\,dt$

بوضع $U'(t)=1$ و $V(t)=Ln(t)$ نجد $U(t)=t$ و $V'(t)=\frac{1}{t}$

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على $]0 , +\infty[$ و دالتاهما المشتقتان U' و V' مستمرتان على $]0 , +\infty[$ وحسب دستور التكامل بالتجزئة نجد:

$$F(x) = \int_1^x 1\times Ln\,t\,dt = \left[t\,Ln\,t\right]_1^x - \int_1^x t\times\frac{1}{t}\,dt$$

$$= \left[t\,Ln\,t\right]_1^x - \int_1^x 1\,dt = \left[t\,Ln\,t\right]_1^x - \left[t\right]_1^x = x\,Ln(x)-x+1$$

إذن الدالة $x \xrightarrow{F} x\,Ln(x)-x+1$ أصلية للدالة $x \mapsto Ln\,x$ على المجال $]0 , +\infty[$ بحيث $F(1)=0$

لاحظ أنه إذا أضفنا -1 إلى الدالة F نحصل على دالة أصلية أخرى لـ $x \mapsto Ln\,x$ هي :

$x \mapsto x\,Ln(x)-x$

6- تطبيقات الحساب التكاملي

1-6 حساب مساحة حيز من مستو

تعريف التكامل لدالة مستمرة يسمح لنا بحساب مساحة حيز من مستو محدود بمنحني هذه الدالة.

خواص

1) إذا كانت الدالة f مستمرة و موجبة على $[a , b]$ فإن مساحة حيز من المستوي لمجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $b \ge x \ge a$ و $f(x) \ge y \ge 0$ هي $\int_a^b f(x)\,dx$

2) إذا كانت f دالة مستمرة و سالبة على $[a , b]$ فإن مساحة حيز من المستوي لمجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $b \ge x \ge a$ و $0 \ge y \ge f(x)$ هي $-\int_a^b f(x)\,dx$

3) إذا كان لدينا $f(x) \le g(x)$ على $[a , b]$ فإن مساحة حيز من المستوي لمجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $b \ge x \ge a$ و $g(x) \ge y \ge f(x)$ هو $\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx$

ملاحظة

1) لحساب المساحة المحصورة بين منحنيين لدالتين g و f على $[a , b]$ نتبع ما يلي:

ـ نجزئ هذا المجال إلى مجالات جزئية بحيث فرق الدالتين يحافظ على إشارة ثابتة.

ـ نكامل دالة الفرق و نراعي العلاقة الموجودة بين التكامل و المساحة.

$$A = -\int_a^c \left(g(x)-f(x)\right)dx + \int_c^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$$

2) في معلم متعامد و متجانس

وحدة المساحة هي مساحة المربع الذي طوله ضلعه $\|\vec{i}\|$ أما في معلم متعامد وحدة المساحة هي مساحة المستطيل الذي أبعاده $\|\vec{i}\|$ و $\|\vec{j}\|$

مثال -

f دالة معرفة على المجال $[-1, 4]$ بحيث $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3-3x^2\right)$

و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) ارسم (γ) على المجال $[-1 , 4]$.

2) احسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ (γ) و محور الفواصل $(x'x)$ و المستقيمين اللذين معادلاتاهما $x = 2$ و $x = 4$.

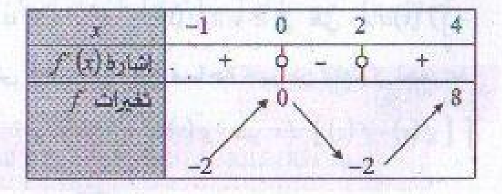
الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-1, 4]$ و لدينا $f'(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-6x\right)$

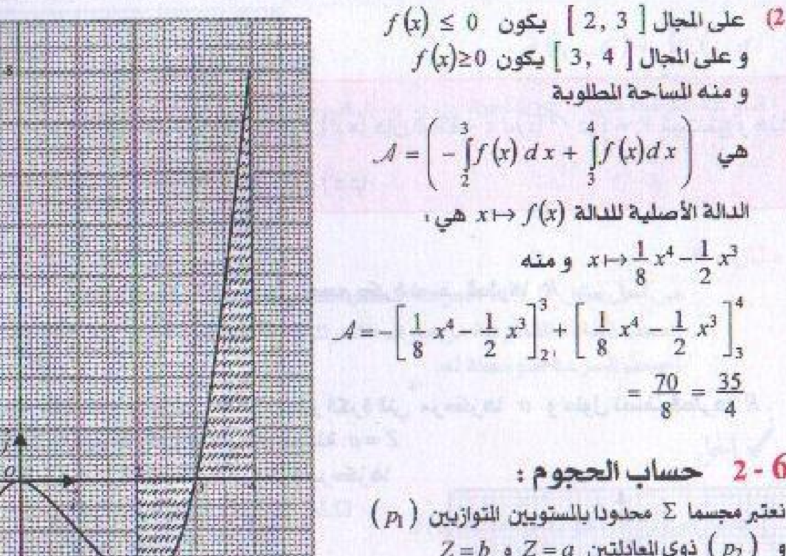
$f'(x)=0$ يكافئ $(x=0)$ أو $x=2$

- إذا كان $x\in[-1 , 0[\cup]2 , 4]$ فإن f متزايدة تماما.
- إذا كان $x\in]0 , 2[$ فإن f متناقصة تماما.

و منه جدول تغيرات f على $[-1, 4]$ هو



x	-1		0		2		4
إشارة $f'(x)$		+	0	−	0	+	
تغيرات f	-2	↗	0	↘	-2	↗	8



2) على المجال $[2, 3]$ يكون $f(x) \le 0$

و على المجال $[3, 4]$ يكون $f(x)\ge 0$

و منه المساحة المطلوبة هي

$$\mathcal{A} = \left(-\int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx\right)$$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto f(x)$ هي:

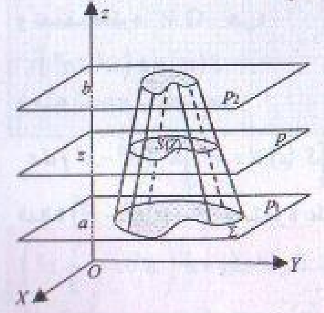
$x\mapsto \frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3$ و منه

$$\mathcal{A} = -\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3\right]_2^3 + \left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3\right]_3^4 = \frac{70}{8} = \frac{35}{4}$$

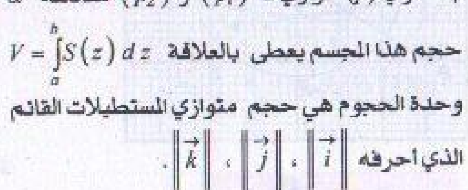


6 - 2 حساب الحجوم:

نعتبر مجسما Σ محدودا بالمستويين المتوازيين (p_1) و (p_2) ذوي المعادلتين $Z=a$ و $Z=b$ على التوالي في معلم متعامد و متجانس و ليكن V حجم هذا المجسم و $S(Z)$ مساحة مقطع منه بالمستوي (p) الموازي لـ (p_1) و (p_2) معادلته $Z = \alpha$ مع $b \ge \alpha \ge a$.



حجم هذا المجسم يعطى بالعلاقة $V = \int_a^b S(z)\,dz$

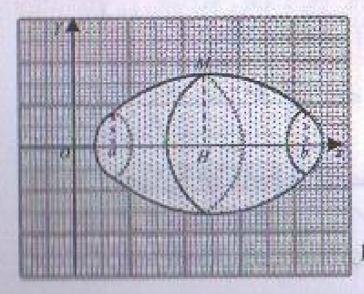


وحدة الحجوم هي حجم متوازي المستطيلات القائم الذي أحرفه $\|\vec{i}\|$ ، $\|\vec{j}\|$ ، $\|\vec{k}\|$.

مجسم دوراني محوره $(x\,x')$

ليكن (γ) قوس من منحنى الممثل للدالة f حيث $y=f(x)$ مع $f(x)\ge 0$ على $[a , b]$.

بتدوير (γ) حول $(x\,x')$ فإن القوس (γ) يولد مساحة دورانية محورها $(x\,x')$ و هذه المساحة تحدد مجسما دورانيا.



و مقطع هذا المجسم بمستوي عمودي على $(x\,x')$ يعطي قرصا مساحته πHM^2

أي $\pi\left(f(x)\right)^2$ حيث $M\left(x, f(x)\right)$ نقطة من (γ)

و حجم هذا المجسم يعطى بالعلاقة $V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$

ملاحظة

من اجل مجسم دوراني محوره $(x x')$ فإن العلاقة $V = \int_a^b a f^2(x) d x$ تستنتج و هذا بتصورنا المحور $(x x')$ في مكان $(z z')$

مثال .

اوجد الدستور الذي يعطي حجم كرة نصف قطرها R .

الحل

في معلم متعامد و متجانس للفضاء نعتبر الكرة التي مركزها o و طول نصف قطرها R .
إذا أخذنا مقطع كرة بمستوي ذي المعادلة $Z = a$
مع $-R \langle a \langle R$ نحصل على دائرة مركزها
Ω ينتمي الى $(z z')$ نصف قطرها ΩM .
و في المثلث القائم $O \Omega M$
لدينا $O\Omega^2 + \Omega M^2 = O M^2$
ومنه $\Omega M^2 = O M^2 - O\Omega^2 = R^2 - a^2$.
مساحة القرص الذي مركزه Ω
و نصف قطره ΩM هي:

$$S(a) = \pi\left(R^2 - a^2\right)$$

و منه الحجم المطلوب هو :

$$V = \int_{-R}^{R} S(z)\, d z = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - z^2\right) d z$$

الدالة $z \mapsto \pi\left(R^2 - z^2\right)$ مستمرة على $[-R , R]$ و دالتها الأصلية هي:

$$z \mapsto \pi\left(R^2 z - \frac{1}{3} z^3\right)$$

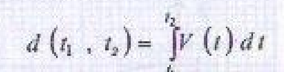
و منه

$$V = \left[\pi\left(R^2 z - \frac{1}{3} z^3\right)\right]_{-R}^{R} = \pi\left(+R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)$$

$$= \pi\left[+\frac{2}{3}R^2 + \frac{2}{3}R^3\right] = \frac{4}{3}\pi R^3$$

6 - 3 العبارة التكاملية للمسافة المقطوعة و السرعة المتوسطة

- إذا علمنا أن السرعة اللحظية $V(t)$ لمتحرك بدلالة الزمن t فإن المسافة المقطوعة $d(t_1, t_2)$ لهذا المتحرك بين اللحظتين t_1 و t_2 هي :



$$d(t_1 , t_2) = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\, d t$$

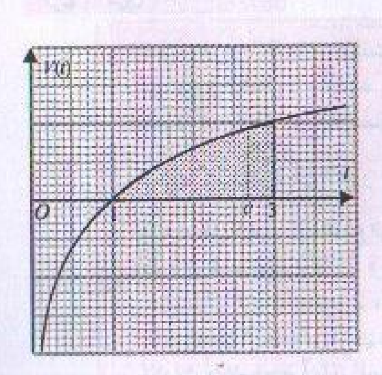
- السرعة المتوسطة V_M بين اللحظتين t_1 و t_2 هي :

$$V_M = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} V(t)\, d t$$

مثال .

من اجل كل $0 \langle t$ ، السرعة اللحظية لمتحرك هي $V(t) = Ln\, t$
احسب المسافة المقطوعة من طرف المتحرك بين اللحظتين $t_1 = 1$ و $t_2 = 3$ ثم احسب السرعة المتوسطة له.

الحل



$$d(t_1 , t_2) = \int_1^3 V(t)\, d t = \left[t\, Ln(t) - t\right]_1^3$$

$$= (3\, Ln(3) - 3) - (0 - 1)$$

$$d = 3\, Ln(3) - 2 \approx 1{,}3\, m$$

$$V_m = \frac{1}{3-1}\int_1^3 V\, Ln(t)\, d t$$

$$= \frac{1}{2} \times 1{,}3 \approx 0{,}65\, m/s$$

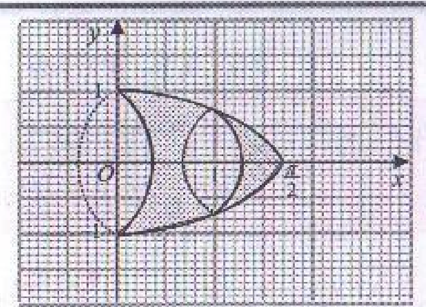
تمرين تدريبي 1

(γ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto \cos x$ المعرفة على المجال $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$.
أ) احسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ (γ) و محور الفواصل .
ب) احسب الحجم المولد بدوران المنحني (γ) حول المحور $(x x')$

الحل

أ) الدالة cos موجبة على المجال $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

و المساحة المطلوبة هي $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, d x$



$S = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

ب) الدالة cos موجبة على $\left[0 \ , \ \frac{\pi}{2}\right]$

و الحجم المطلوب يساوي $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\cos^2 x\, dx$

لدينا $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

و منه الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \cos^2 x$ هي الدالة F حيث:

$F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$ إذن $V = \pi\left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right) = \pi \times \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi^2}{4}$

تمرين تدريبي . 2

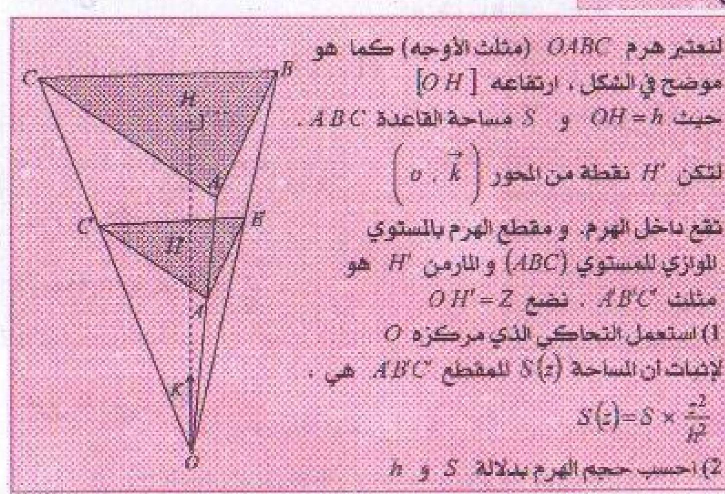
لنعتبر هرم $OABC$ (مثلث الأوجه) كما هو موضح في الشكل ، ارتفاعه $[OH]$ حيث $OH = h$ و S مساحة القاعدة ABC.

لتكن H' نقطة من المحور $\left(o \ , \ \vec{k}\right)$ تقع داخل الهرم. و مقطع الهرم بالمستوي الموازي للمستوي (ABC) و المارمن H' هو مثلث $A'B'C'$. نضع $OH' = Z$

1) استعمل التحاكي الذي مركزه O لإثبات أن المساحة $S(z)$ للمقطع $A'B'C'$ هي :

$S(z) = S \times \frac{z^2}{h^2}$

2) احسب حجم الهرم بدلالة S و h



✔ الحل

1) $\frac{OH'}{OH} = \frac{z}{h} = k$ منه $OH' = k\,OH$ و بما أن $\vec{OH}$ و $\vec{OH'}$ لهما نفس الإتجاه

فإن $\vec{OH'} = k\,\vec{OH}$ و هذا يعني H' صورة H بالتحاكي الذي مركزه النقطة O

و نسبته $k = \frac{z}{h}$

$(HB)\perp(OH)$ و $(OH')\perp(H'B')$ و $(HB)\perp(H'B')$

حسب نظرية طاليس $k = \frac{OH'}{OH} = \frac{OB'}{OB}$ و هذا يعني أن B' صورة B بالتحاكي الذي مركزه O و نسبته k

بنفس الطريقة نبين أن A' صورة A و C' صورة C

إذن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بالتحاكي الذي مركزه النقطة O و نسبية $k = \frac{z}{h}$

إذا كانت S مساحة ABC و $S(z)$ مساحة $A'B'C'$

فإن $S(z) = k^2 S$ و منه $S(z) = \frac{z^2}{h^2} S$

2) $V = \int_0^h S(z)\, dz = \int_0^h S\,\frac{z^2}{h^2}\, dz = S\int_0^h \frac{z^2}{h^2}\, dz = \frac{S\,h}{3}$

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 حساب تكامل دالة درجية

1) مثل الدالة الدرجية f ثم احسب التكامل $I(f)$ على $[-2 , 3]$

حيث $\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2} , & 0 > x \geq -2 \\ f(x) = +1 , & 3 \geq x \geq 0 \end{cases}$

2) مثل الدالة f المعرفة على $[0 , 3]$ بـ $f(x) = E(x) - x$ حيث E دالة الجزء الصحيح ثم احسب التكامل $I(f)$ على المجال $[0 , 3]$

✓ الحل

الدالة f سالبة على المجال $[-2 , 0[$ و منه $I(f)$

هو نظير مساحة المستطيل الذي أبعاده 2 و $\frac{1}{2}$

اي $I(f) = -2 \times \frac{1}{2} = -1$

الدالة f موجبة على المجال $[0 , 3]$

و منه $I(f)$ يساوي مساحة المستطيل الذي أبعاده 3 و 1 أي $I(f) = 1 \times 3 = 3$

تكامل الدالة f على المجال $[-2 , 3]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا

اي $3 - 1 = +2$

2) $\begin{cases} f(x) = -x , & x \in [0 , 1[\\ f(x) = 1 - x , & x \in [1 , 2[\\ f(x) = 2 - x , & x \in [2 , 3[\end{cases}$

- الدالة f سالبة على المجال $]0,1[$

و بالتالي فإن $I(f)$ يساوي -1 على $]0,1[$

- الدالة f سالبة على المجال $]1 , 2[$

و بالتالي $I(f)$ يساوي -1.

- الدالة f سالبة على المجال $]2 , 3[$ و بالتالي فإن $I(f)$ يساوي -1

و عليه فالتكامل f على $[0,3]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا أي

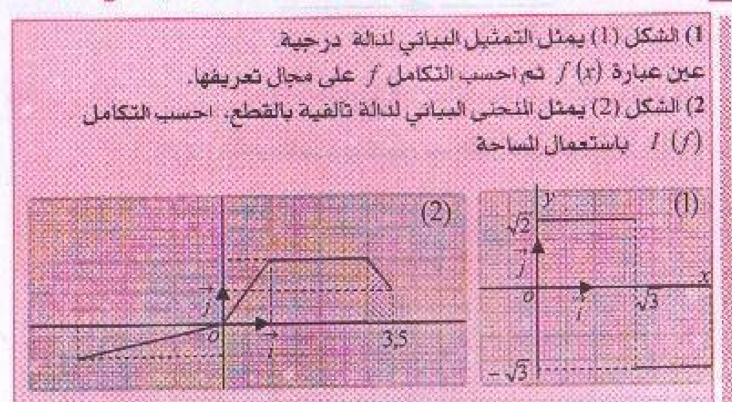
$-1-1-1=-3$

تطبيق 2 حساب تكامل دالة درجية و تكامل دالة تآلفية بالقطع

1) الشكل (1) يمثل التمثيل البياني لدالة درجية.

عين عبارة $f(x)$ ثم احسب التكامل f على مجال تعريفها.

2) الشكل (2) يمثل المنحني البياني لدالة تآلفية بالقطع. احسب التكامل $I(f)$ باستعمال المساحة



✓ الحل

1) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{2} , & \sqrt{3} > x \geq 0 \\ f(x) = -\sqrt{3} , & 3 \geq x \geq \sqrt{3} \end{cases}$

f موجبة على المجال $[0 , \sqrt{3}[$ و بالتالي $I(f)$ يساوي مساحة المستطيل الذي ابعاده $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ منه $I(f) = \sqrt{6}$

f سالبة على المجال $[\sqrt{3} , 3]$ و بالتالي $I(f)$ هو نظير مساحة المستطيل الذي ابعاده $(3-\sqrt{3})$ و $\sqrt{3}$ و بالتالي $I(f) = -\sqrt{3}(3-\sqrt{3})$

إذن تكامل f على $[0 , 3]$ يساوي المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا اي $I(f) = [\sqrt{6} - \sqrt{3}(3-\sqrt{3})]$

2) - الدالة f سالبة على المجال $[-3 , 0]$ و بالتالي فإن $I(f)$ هو نظير مساحة المثلث التي تساوي $\frac{3}{2}$ منه $I(f) = -\frac{3}{2}$

- الدالة f موجبة على المجال $[0 , 3]$ و بالتالي فإن التكامل $I(f)$ هو مساحة شبه المنحرف الذي طول قاعدته الكبرى 3 و الصغرى 2 و ارتفاعه 2 و تساوي

$\frac{(3+2) \times 2}{2} = 5$

إذن $I(f) = 5$

- الدالة f موجبة على المجال $[3 , 3,5]$ و بالتالي فإن التكامل $I(f)$ هو مساحة مثلث الذي قاعدته 0,5 و وارتفاعه 1 و تساوي $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 0,5}{2}$ ومنه $I(f) = \frac{1}{4}$

إذن التكامل $I\ (f)$ على المجال $[-3 ، 3,5]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا و تساوي $\frac{-3}{2}+5+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

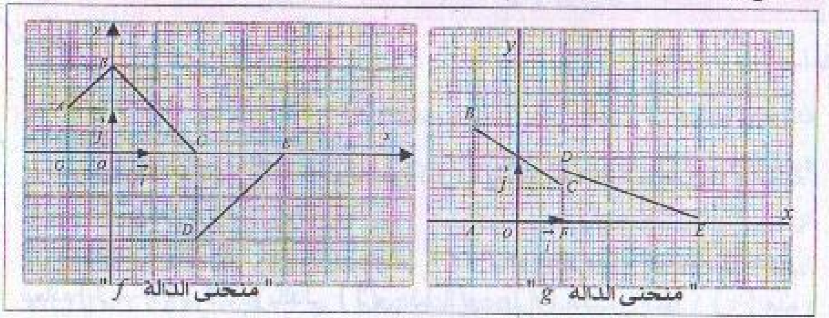
تطبيق 3 حساب تكامل دالة تآلفية بالقطع

f و g دالتان تآلفيتان بالقطع معرفتان على المجال $[-1\ ,\ 4]$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=x+2 & ,\ x\in[-1\ ,\ 0] \\ f(x)=-x+2 & ,\ x\in]0\ ,2] \\ f(x)=x-4 & ,\ x\in]2\ ,4] \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} g(x)=-\frac{1}{2}x+1 & ,\ x\in[-1\ ,1[\\ g(x)=-\frac{1}{4}x+1 & ,\ x\in[1\ ,\ 4] \end{cases}$$

احسب تكاملي f و g على $[-1\ ,\ 4]$

✓ الحل



"منحنى الدالة f" "منحنى الدالة g"

- الدالة f موجبة على $[-1\ ,\ 0]$ و بالتالي فإن $I\ (f)$ يساوي مساحة شبه المنحرف $OBAG$ التي تساوي $1,5$ و منه $I\ (f)=1,5$

الدالة f موجبة على المجال $]0\ ,\ 2]$ و بالتالي فإن $I\ (f)$ يساوي مساحة المثلث OBC التي تساوي 2 و منه $I\ (f)=2$

الدالة f سالبة على المجال $]2\ ,\ 4]$ و بالتالي فإن $I\ (f)$ هو نظير مساحة المثلث CDE التي تساوي 2 و منه $I\ (f)=-2$

إذن تكامل f على $[-1\ ,\ 4]$ هو المجموع الجبري للتكاملات و عليه $\frac{3}{2}=2-$ $I\ (f)=\frac{3}{2}$

- الدالة g موجبة على $[-1\ ,\ 1[$ و بالتالي فإن $I\ (g)$ يساوي مساحة شبه المنحرف $ABCF$ و التي تساوي $2,25$ و منه $I\ (g)=2,25$

الدالة g موجبة على المجال $[1\ ,\ 4]$ و بالتالي $I\ (g)$ هي مساحة المثلث DFE و التي تساوي $\frac{9}{8}=\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}$ ومنه $I\ (g)=\frac{9}{8}$ إذن تكامل g على $[-1,4]$ هو $\frac{27}{8}=\frac{9}{8}+2,25$

تطبيق 4 حساب تكامل دالة تآلفية

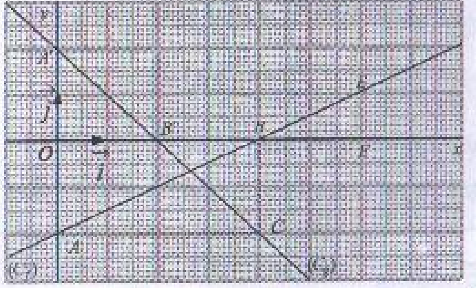
الدالتان f و g معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{1}{2}x-2$ و $g(x)=2-x$

1) ارسم (C_f) و (C_g) في معلم متعامد و متجانس

2) باستعمال حساب المساحات احسب التكاملات التالية $\int_0^2 g(x)dx$ ،

$\int_2^4 g(x)dx$ ، $\int_0^4 f(x)dx$ ، $\int_4^6 f(x)dx$

✓ الحل



1) المنحني الممثل للدالة f عبارة عن مستقيم يمر من النقط ؛ $A(0,-2)$ ، $B(4,0)$ و $E(6,1)$.

المنحني الممثل للدالة g عبارة عن مستقيم يمر من النقط ؛ $A'(0,2)$ ، $B'(2,0)$ و $C(4,-2)$

2) الدالة f موجبة ومستمرة على $[4,6]$ و بالتالي فإن تكامل f على $[4,6]$ تساوي مساحة المثلث $BE'E$

ومنه $\int_4^6 f(x)dx=1$

- الدالة f سالبة ومستمرة على المجال $[0,4]$

وبالتالي فإن تكامل f على $[0,4]$ هونظير مساحةالمثلث OBA التي تساوي 4

إذن $\int_0^4 f(x)dx=-4$

- الدالة g معرفة و موجبة على $[0\ ,\ 2]$ و بالتالي فإن تكامل g على $[0\ ,\ 2]$ تساوي مساحة المثلث OBA' التي تساوي 2 إذن $\int_0^2 g(x)dx=2$

- الدالة g سالبة على المجال $[2\ ,4]$ و بالتالي فإن تكامل f على $[2\ ,4]$ هو نظير مساحة المثلث $B'BC$ التي تساوي 2

إذن $\int_2^4 g\ (x)\ dx=-2$

تطبيق 5 تعيين دالة علم تكاملها

1) أوجد دالة تالفية p بحيث $p : x \mapsto ax+2$ مع $a \rangle 0$ التي تكاملها على المجال $[0 , 6]$ هي 16

2) أوجد الدالة التالفية q بحيث $q : x \mapsto mx$ التي تكاملها على المجال $[0 , 6]$ يساوي -8 مع $m \langle 0$

✓ الحل

1) بما ان p موجبة على $[0 , 6]$
فإن تكامل p على $[0 , 6]$
يساوي مساحة شبه المنحرف $OBAC$
و التي تساوي ،

$$\frac{(2+6a+2)\times 6}{2} = 18a+12$$

و بالتالي $18a+12=16$ منه نستنتج ،

$a=\frac{2}{9}$ إذن $p(x) = \frac{2}{9}x+2$

2) بما ان q سالبة على المجال $[0 , 6]$
فإن تكامل q على $[0 , 6]$ هو نظير
مساحة المثلث OAB التي تساوي $18|m|$
و بالتالي $18|m|=-(-8)$
اي $18|m|=8$ و منه $m = \frac{-4}{9}$.

تطبيق 6 حساب التكامل بالاعتماد على مساحة قرص

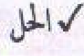
1) بين أن الدائرة (C) التي مركزها النقطة $A(4,0)$ و المارة من مبدإ المعلم تكتب على الشكل $(x-4)^2+y^2=16$.

2) نعتبر النقطتين B و C من الدائرة (C) فاصلتهما 5 و 3 على الترتيب

و بحيث تراتيبها موجبة. بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) استنتج التكاملين التاليين و هذا باستعمال المساحات:

$$I=\int_0^8 \sqrt{8x-x^2}\,dx \quad ، \quad J=\int_2^6 \sqrt{8x-x^2}\,dx$$



✓ الحل

1) الدائرة التي مركزها A و تمر من O
هي مجموعة النقط M من المستوي
بحيث $AM=OA$
و بما ان $OA=4$ فإن $AM=4$
و عليه $(x-4)^2+y^2=16$.

2) $OC=4$ و $OB=4$
لأن C و B نقطتان من الدائرة (C)
ترتيب كل من B و C هو $\sqrt{12}$
و منه $BC=\sqrt{(6-2)^2+0^2}=4$
و منه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) حساب $I=\int_0^8 \sqrt{8x-x^2}\,dx$

الدالة $x \xrightarrow{f} \sqrt{8x-x^2}$ موجبة على المجال $[0 , 8]$ و بالتالي فإن تكامل f على $[0 , 8]$
يساوي مساحة نصف القرص الذي مركزه A و نصف قطره 4 والتي تساوي $\frac{1}{2}\pi \times 4^2$ اي 8π

إذن $I=\int_0^8 \sqrt{8x-x^2}\,dx=8$

$J=\frac{I}{3}+2\times($ مساحة $ACD)$

$$J=\frac{8}{3}+2\times\frac{2\times\sqrt{12}}{2}=\frac{8}{3}+2\sqrt{12}=\frac{8+6\sqrt{12}}{3}$$

تطبيق 7 حساب التكامل باستعمال الخطية

1) إذا علمت ان $\int_0^3 f(x)\,dx=3$ و $\int_0^3 g(x)\,dx=-3$ احسب مايلي:

$$I=\int_0^3 4f(x)\,dx \quad ، \quad J=\int_0^3 \frac{1}{5}g(x)\,dx \quad ، \quad k=\int_0^3 (2f(x)-3g(x))\,dx$$

2) من اجل كل x من المجال $]0 , \frac{\pi}{4}[$ قارن بين $\sin x$ و $\cos x$

ثم بين $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$

✓ **الحل**

1) $I = 4\int_0^3 f(x)dx = 4(3) = 12$ و $J = \frac{1}{5}\int_0^3 g(x)dx = \frac{1}{5}(-3) = \frac{-3}{5}$

$K = 2\int_0^3 f(x)dx - 3\int_0^3 g(x)dx = 2I - 3J = 15$

2) من اجل كل x من $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ لدينا $\sin x < \cos x$ و بالتالي $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx$

تطبيق 8 — المقارنة بين تكاملين

قارن بين العددين الحقيقيين I و J و ذلك بدون حساب قيمتيهما في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $I = \int_0^1 x e^x dx$ و $J = \int_0^1 x^2 e^x dx$ ب) $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\, dx$ و $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 x Ln x$

جـ) $I = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt$ و $J = \int_0^1 \frac{t}{2+t} dt$

✓ **الحل**

أ) من اجل كل x من $[0, 1]$ يكون $x^2 \leq x$ بالضرب في e^x نجد $x^2 e^x \leq x e^x$ و منه

$\int_0^1 x^2 e^x dx \leq \int_0^1 x e^x dx$ إذن $J \leq I$

ب) من اجل كل x من $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ يكون $Ln x < x$ بالضرب في x نجد $x Ln x < x^2$

و منه $\int_{\frac{1}{2}}^1 x Ln x < \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx$ إذن $J < I$

جـ) من اجل كل t من $[0, 1]$ يكون $1+t < 2+t$ و بالقلب نجد $\frac{1}{1+t} > \frac{1}{2+t}$

وبالضرب في t نجد $\frac{t}{1+t} > \frac{t}{2+t}$ بالمرور إلى التكامل نجد $\int_0^1 \frac{t}{1+t} dt > \int_0^1 \frac{t}{2+t} dt$

إذن $I > J$.

تطبيق 9 — إثبات متباينات

برهن المتباينات التالية :

أ) $1 \leq \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}} dt \leq 2$ ، ب) $\frac{9}{2} \leq \int_0^3 x\sqrt{1+x}\, dx \leq 9$

جـ) $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 \frac{1}{2+t^2} dt \leq \frac{1}{2}$ ، د) $2 Ln 2 \leq \int_1^3 Ln(x^2+1) dx \leq 2 Ln 10$

✓ **الحل**

أ) من اجل كل t من $[0, 4]$ يكون $0 \leq \sqrt{t} \leq 2$ بإضافة 2 إلى طرفي المتباينة نجد ،

$2 \leq 2+\sqrt{t} \leq 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2+\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2}$ بالمرور إلى التكامل نجد ،

$\int_0^4 \frac{1}{4} dt \leq \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}} dt \leq \int_0^4 \frac{1}{2} dt$ اي $1 \leq \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}} dt \leq 2$

ب) بما أن $0 \leq x \leq 3$ فإن $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 2$ بالضرب في x نجد ،

$x \leq x\sqrt{1+x} \leq 2x$ بالمرور إلى التكامل نجد

$\int_0^3 x\, dx \leq \int_0^3 x\sqrt{1+x}\, dx \leq \int_0^3 2x\, dx$ اي $\frac{9}{2} \leq \int_0^3 x\sqrt{1+x} \leq 9$

جـ) من اجل كل t من $[0, 1]$ لدينا $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+t^2} \leq \frac{1}{2}$ و بالمرور إلى التكامل نجد ،

$\int_0^1 \frac{1}{3} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{2+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{2} dt$ منه نجد $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 \frac{1}{2+t^2} dt \leq \frac{1}{2}$

د) من اجل كل x من $[1, 3]$ لدينا $2 \leq x^2+1 \leq 10$ ومنه ينتج،

$Ln 2 \leq Ln(x^2+1) \leq Ln 10$

بالمرور إلى التكامل نجد $2 Ln 2 \leq \int_1^3 Ln(x^2+1) dx \leq 2 Ln 10$.

تطبيق 10 — حصر تكامل دالة

نريد حصر التكامل $I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx$.

1) بدراسة تغيرات الدالتين h و K على المجال $[0, 1]$ بحيث ،

$h(x)=e^{-x}+x-1$ و $K(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}$ بين انه من اجل كل x من $[0\,,\,1]$ يكون $1-x\le e^{-x}\le 1-x+\frac{x^2}{2}$ ... (1)

2) استنتج حصرا لـ e^{-x^2} لما x ينتمي إلى $[0\,,\,1]$ ثم بين انه من اجل كل x من $[0\,,\,1]$ يكون $1-x\le\frac{e^{-x^2}}{1+x}\le 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$ .... (2)

3) أ) استنتج انه من اجل كل x من $[0\,,\,1]$:
$$\frac{x^4}{1+x}=x^3-x^2+x-1+\frac{1}{1+x}$$
ب) استنتج من المتباينة (2) أن $\frac{1}{2}\le I\le\frac{5}{24}+\frac{Ln2}{2}$

✓ الحل

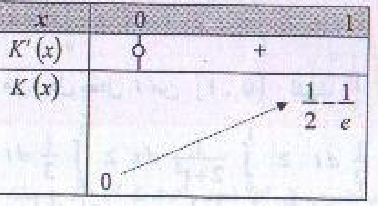
1) h قابلة للاشتقاق على $[0\,,\,1]$ و لدينا $h'(x)=-e^{-x}+1$

الدالة K قابلة للاشتقاق على $[0\,,\,1]$ و لدينا $K'(x)=h(x)$

و بما ان $h(x)\ge 0$ فإن $K'(x)\ge 0$

و منه فإن الدالة K متزايدة تماما على $[0\,,\,1]$.

x	0		1
$h'(x)$	0	$+$	
$h(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$



$h(x)\geq 0$ يكافئ $e^{-x}\ge 1-x$ ... (*)

$K(x)\geq 0$ يكافئ $e^{-x}\le 1-x+\frac{x^2}{2}$ ...(**)

من (*) و (**) نجد $1-x\le e^{-x}\le 1-x+\frac{x^2}{2}$ ... (1)

2) بما ان x ينتمي إلى $[0\,,\,1]$ فإن $x^2\in[0\,,\,1]$ و باستبدال x بـ x^2 في المتباينة (1) نجد $1-x^2\le e^{-x^2}\le 1-x^2+\frac{x^4}{2}$ بالقسمة على $1+x$ نجد :

$$(2)\ ...\ 1-x\le\frac{e^{-x^2}}{1+x}\le 1-x+\frac{x^4}{1+x}\le 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$$

3) أ) بعد إنجاز القسمة الإقليدية لـ x^4 على $1+x$ نجد $\frac{x^4}{1+x}=x^3-x^2+x-1+\frac{1}{1+x}$

ب) المتباينة (2) تصبح $1-x\le\frac{e^{-x^2}}{1+x}\le 1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+x)}$

بالتبسيط نجد $1-x\le\frac{e^{-x^2}}{1+x}\le\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2}$ و بالمرور إلى التكامل نجد :

$$\int_0^1(1-x)\,dx\le\int_0^1\frac{e^{-x^2}}{1+x}dx\le\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2}\right]dx$$

منه نستنتج :

$$\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\le\int_0^1\frac{e^{-x^2}}{1+x}dx\le\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}Ln(x+1)+\frac{1}{2}x\right]_0^1$$

$\frac{1}{2}\le\int_0^1\frac{e^{-x^2}}{1+x}dx\le\frac{5}{24}+\frac{1}{2}Ln(2)$ إذن $\frac{1}{2}\le I\le\frac{5}{24}+\frac{1}{2}Ln(2)$

تطبيق 11 دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

(I_n) متتالية معرفة على $I\!N$ كما يلي $I_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$

1) أ) احسب I_1 ثم I_0+I_1 و استنتج I_0

ب) من اجل كل عدد طبيعي n احسب I_n+I_{n+1}

2) برهن انه من اجل كل x من $[0\,,\,1]$

$$\frac{e^{nx}}{1+e}\le\frac{e^{nx}}{1+e^x}\le\frac{e^{nx}}{2}$$

ثم أعط حصرا لـ I_n.

3) استنتج نهاية كل من المتتاليتين (I_n) و $\left(\frac{I_n}{e^n}\right)$

✓ الحل

1) من اجل $n=1$ لدينا $I_1=\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx$

بوضع $u(x)=e^x+1$ نجد $u'(x)=e^x$ منه :

$$I_1=\int_0^1\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\left[Ln(u(x))\right]_0^1=\left[Ln(e^x+1)\right]_0^1=Ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

$$I_0+I_1=\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx+\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\int_0^1 1\,dx=1$$

بما أن $I_0+I_1=1$ و $I_1=Ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ فإن $I_0=1-Ln\left(\frac{e+1}{2}\right)=Ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$

ب) $I_n+I_{n+1}=\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx+\int_0^1\frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx=\int_0^1\frac{e^{nx}+e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx$

$$=\int_0^1 \frac{e^{nx}(1+e^x)}{1+e^x}dx=\int_0^1 e^{nx}dx=\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{n}e^n-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}(e^n-1)$$

2) من اجل كل x من $[0,1]$ لدينا $e\ge e^x\ge 1$ و منه $e+1\ge e^x+1\ge 2$

بالقلب نجد $\frac{1}{e+1}\le\frac{1}{e^x+1}\le\frac{1}{2}$ بالضرب في e^{nx} نجد:

$\frac{e^{nx}}{e+1}\le\frac{e^{nx}}{e^x+1}\le\frac{e^{nx}}{2}$ ... (1)

بمكاملة حدود المتباينة (1) نجد $\left[\frac{1}{n(1+e)}e^{nx}\right]_0^1\le I_n\le\left[\frac{1}{2n}e^{nx}\right]_0^1$ بالحساب

نجد: $\frac{1}{n(1+e)}(e^n-1)\le I_n\le\frac{1}{2n}[e^n-1]$ ... (2)

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n-1}{n(e+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n(1-e^{-n})}{n(e+1)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^n}{n}\right)\frac{(1-e^{-n})}{(e+1)}=+\infty$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n}{n}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-n}}{e+1}=\frac{1}{e+1}$)

و حسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x\to+\infty}I_n=+\infty$

- بقسمة طرفي المتباينة (2) على e^n نجد $\frac{1}{n(e+1)}\times\frac{e^n-1}{e^n}\le\frac{I_n}{e^n}\le\frac{e^n-1}{e^n}\times\frac{1}{2n}$

بما ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n-1}{e^n}=1$ و $\lim\frac{1}{n(e+1)}=0$ و $\lim\frac{1}{2n}=\lim\frac{1}{n(e+1)}=0$ فإن،

$\lim\frac{e^n-1}{e^n}\times\frac{1}{2n}=\lim\frac{e^n-1}{e^n}\times\frac{1}{n(e+1)}=0$ و حسب نظرية الحصر فإن: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{I_n}{e^n}\right)=0$

تطبيق 12 دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

من اجل كل عدد طبيعي n نضع $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\cos 2x\,dx$

أ) بين ان $0\le I_n\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ ؛ ب) استنتج نهاية للمتتالية (I_n).

✓ الحل

أ) من اجل كل عدد حقيقي x من $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ يكون $2x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و $0\le\cos 2x\le 1$

ومنه $0\le x^n\cos 2x\le x^n$ بالمرور إلى التكامل نجد: $0\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\cos 2x\,dx\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\,dx$

لكن $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\,dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ و $0<\frac{1}{n+1}\le 1$

ومنه $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\,dx\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ إذن $0\le I_n\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

ب) بما أن $0<\frac{\pi}{4}<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}=0$ و بالتالي حسب نظرية الحصر نجد: $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$

تطبيق 13 تعيين دالة أصلية لدالة

1) أ) بين أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=3[\cos(3x+2)+x]$ تقبل دالة أصلية F معرفة بـ $F(x)=\sin(3x+2)+3\frac{x^2}{2}+10$

ب) اوجد دالتين أصليتين اخرتين للدالة f.

2) أ) بين أن الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ تقبل دالة أصلية G بحيث $G(x)=Ln(x+1)+\frac{1}{x+1}$

ب) H دالة معرفة بـ $H(x)=Ln(7x+7)+\frac{x+2}{x+1}$

هل H دالة أصلية لـ g ؟

✓ الحل

1) أ) F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$ إذا و فقط إذا كان من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $F'(x)=f(x)$

الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $F'(x)=3\cos(3x+2)+3x=f(x)$

منه F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) جميع الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي من الشكل $F+k$ حيث k ثابت حقيقي

و عليه فإن الدالتين $x \mapsto F(x)+1$ و $x \mapsto F(x)+2$ أصليتان لـ f .

2) أ) G دالة أصلية لـ g على المجال $]0,+\infty[$ إذا وفقط إذا كانت $G'(x)=g(x)$

الدالة G قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا $G'(x)=g(x)$

منه G دالة أصلية للدالة g على المجال $]0,+\infty[$

ب) الدالة H قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا $H'(x)=g(x)$

منه H دالة أصلية للدالة g على المجال $]0,+\infty[$

تطبيق 14 تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة

1) عين دالة أصلية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x)=3x^5+x^4+x$ ، ب) $f(x)=\frac{2x^3+x^2-1}{x^2}$

جـ) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2}$ ، د) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

2) عين الدالة الأصلية G للدالة g في كل حالة من الحالات التالية .

أ) $g(x)=\frac{2x-1}{(x^2-x)^3}$ على $]1,+\infty[$ ، ب) $g(x)=3(2x-3)^6$ على $\mathbb{R}$

جـ) $g(x)=\sin x\cos x$ على $\mathbb{R}$ ، د) $g(x)=\frac{5}{(-3x+1)^3}$ على $]-\infty,\frac{1}{3}[$

هـ) $g(x)=\frac{3}{2x-1}$ على المجال $]\frac{1}{2},+\infty[$

الحل

1) لتكن F دالة أصلية للدالة f على I .

أ) $F(x)=\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2$

ب) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=2x+1-\frac{1}{x^2}$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto -\frac{1}{x^2}$ هي الدالة $x\mapsto\frac{1}{x}$ و بالتالي $F(x)=x^2+x+\frac{1}{x}$

جـ) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{x}$ على $\mathbb{R}^*$ هي $x\mapsto Ln|x|$ و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ على $\mathbb{R}^*$ هي الدالة $x\mapsto -\frac{1}{x}$ و منه $F(x)=x+Ln|x|-\frac{1}{x}$

د) $f(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ حيث $u(x)=x^2-1$ وبالتالي $F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{x^2-1}$

2) أ) $g(x)=(2x-1)(x^2-x)^{-3}$

$g(x)=u'(x)\times(u(x))^{-3}$ حيث $u(x)=x^2-x$ ومنه فإن الدالة G معرفة بـ:

$$G(x)=\frac{u(x)^{-2}}{-2}=\frac{-1}{2}\times\frac{1}{(x^2-x)^2}$$

ب) يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $g(x)=\frac{3}{2}\times u'(x)(u(x))^3$ حيث: $u(x)=2x-3$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto u'(x)(u(x))^3$ هي الدالة $x\mapsto\frac{1}{4}(u(x))^4$ أي $x\mapsto\frac{1}{4}(2x-3)^4$

و منه فإن الدالة الأصلية للدالة g هي G حيث $G(x)=\frac{3}{8}(2x-3)^4$

جـ) $g(x)=\sin x\cos x$ و منه $g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$

الدالة الأصلية للدالة g هي الدالة G حيث $G(x)=-\frac{1}{4}\cos(2x)$

د) يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $g(x)=5(-3x+1)^{-3}$

بوضع $u(x)=-3x+1$ نجد $u'(x)=-3$ و منه $g(x)=\frac{-5}{3}u'(x)(u(x))^{-3}$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto u'(x)(u(x))^{-3}$ هي الدالة $x\mapsto\frac{-1}{2}(u(x))^{-2}$

و منه فإن الدالة الأصلية G للدالة g معرفة بـ: $G(x)=\frac{5}{6(-3x+1)^2}$

هـ) بوضع $u(x)=2x-1$ نجد $u'(x)=2$ منه $g(x)$ تكتب على الشكل $g(x)=\frac{3}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ هي $x\mapsto Ln(2x-1)$

و منه فإن الدالة الأصلية G للدالة g معرفة بـ $G(x)=\frac{3}{2}Ln(2x-1)$

تطبيق 15 تعيين دالة أصلية تحقق شرط معطى

أوجد الدالة الأصلية F للدالة f على مجال I يطلب تعيينه.

أ) $f(x)=x^2-3x-1$ و $F(0)=0$ ، ب) $f(x)=\frac{1}{x^2}+x$ و $F(1)=0$

جـ) $f(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$ و $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ ، د) $f(x)=\frac{-1}{2-x}$ و $F(1)=1$

✓ الحل

أ) الدالة f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و دوالها الأصلية هي $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x+k$

$F(0)=0$ يكافئ $k=0$ ومنه الدالة الأصلية للدالة f هي $x\mapsto \frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x$

ب) الدالة f معرفة و مستمرة على $]0,+\infty[$ و دوالها الأصلية على هذا المجال هي :

$$F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}+k$$

$F(1)=0$ يكافئ $k=\frac{1}{2}$ و منه الدالة الأصلية هي $x\mapsto \frac{-1}{x}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$.

جـ) الدالة f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و دوالها الأصلية من الشكل :

$$F(x)=\frac{-1}{4}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ يكافئ $k=\frac{\sqrt{2}}{8}$

ومنه الدالة الأصلية هي $x\mapsto \frac{-1}{4}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}$

د) الدالة f معرفة و مستمرة على المجال $]-\infty,2[$ و دوالها الأصلية هي :

$$F(x)=Ln(2-x)+k$$

$F(1)=1$ يكافئ $k=1$ ومنه الدالة الأصلية التي تحقق الشرط هي $x\mapsto Ln(2-x)+1$

تطبيق 16 تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة

أوجد دالة أصلية F للدالة f على المجال المعطى في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x)=3e^{-2x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

ب) $f(x)=\sqrt{x+2}+\frac{x}{2\sqrt{x+2}}$ ، $I=]-2,+\infty[$

جـ) $f(x)=\frac{1}{xLnx}$ ، $I=]1,+\infty[$

د) $f(x)=1+\frac{1}{\tan^2 x}$ ، $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

هـ) $f(x)=\tan^2 x$ ، $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

و) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}e^{\frac{x+1}{x-2}}$ ، $I=]2,+\infty[$

ي) $f(x)=\frac{Lnx}{x}$ ، $I=]0,+\infty[$

✓ الحل

أ) نضع $u(x)=-2x+1$ منه $u'(x)=-2$ عندئذ $f(x)=\frac{-3}{2}u'(x)e^{u(x)}$

و منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x)=\frac{-3}{2}e^{u(x)}=\frac{-3}{2}e^{-2x+1}$

ب) نضع $u(x)=x$ و $v(x)=\sqrt{x+2}$ عندئذ $u'(x)=1$ و $V'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

بالتالي $f(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$ و عليه فإن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x)=(u\times v)(x)$ اي $F(x)=x\sqrt{x+2}$

جـ) يمكن كتابة $f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{Lnx}$ وبوضع $u(x)=Lnx$ نجد $u'(x)=\frac{1}{x}$

ومنه $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ و عليه فإن الدالة الأصلية للدالة f على $]1,+\infty[$ هي $F(x)=Ln(u(x))$ اي $F(x)=Ln(Ln\,x)$

د) من أجل كل x من I لدينا $(\tan x)'=1+\tan^2 x$

و منه $f(x)=\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}=(\tan x)'\times\tan^{-2}x=u'(x)u^{-2}(x)$ حيث $u(x)=\tan x$

و عليه فإن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x)=-\frac{1}{u(x)}$

اي $F(x)=\frac{-1}{\tan x}$

هـ) لدينا $f(x)=\tan^2 x$ و لدينا $(\tan x)'=1+\tan^2 x$

ومنه $\tan^2 x=(\tan x)'-1$ و بالتالي $f(x)=(\tan x)'-1$

إذن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x)=\tan(x)-x$

و) بوضع $u(x)=\frac{x+1}{x-2}$ نجد $u'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$ و منه $f(x)=\frac{1}{-3}(u'(x))e^{u(x)}$

و عليه فالدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x)=\frac{-1}{3}e^{u(x)}$

اي $F(x)=-\frac{1}{3}e^{\frac{x+1}{x-2}}$

ي) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $\frac{1}{x}\times Lnx$ و بوضع $u(x)=Lnx$ نجد $u'(x)=\frac{1}{x}$

و بالتالي $f(x)=u'(x)\,u(x)$ و عليه فالدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث :

$f(x)=\frac{1}{2}(Lnx)^2$

تطبيق 17 تعيين دالة أصلية لدالة ناطقة

1) f دالة معرفة على $I=]-1,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x+4}{(x+1)^2}$

أ) اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$

ب) استنتج دالة أصلية لـ f على I.

2) g دالة معرفة على $J=]2,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x-2}$

أ) اكتب $g(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة g على I.

3) h دالة معرفة على $H=]1,+\infty[$ بـ $h(x)=\frac{x^3+x^2-x+2}{x^2-1}$

أ) اكتب $h(x)$ على الشكل $h(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+1}$

ب) استنتج دالة أصلية لـ h على H.

الحل ✓

1) أ) بتوحيد المقامات نجد $f(x)=\frac{ax+a+b}{(x+1)^2}$ و بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد :

$a=1$ و $b=3$ و عليه $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$

ب) الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{x+1}$ هي $x\mapsto Ln(x+1)$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{3}{(x+1)^2}$ هي $x\mapsto\frac{-3}{x+1}$

و بالتالي الدالة الأصلية لـ f هي $F(x)=Ln(x+1)+\frac{-3}{x+1}$

2) أ) بنفس الكيفية السابقة نجد أن $g(x)=2x+1+\frac{3}{x-2}$

ب) الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto 2x+1$ هي الدالة $x\mapsto x^2+x$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{3}{x-2}$ هي الدالة $x\mapsto 3Ln(x-2)$

و بالتالي الدالة الأصلية لـ g هي $F(x)=x^2+x+3Ln(x-2)$

3) أ) بنفس الكيفية السابقة نجد $h(x)=x+1+\frac{3}{2(x-1)}-\frac{3}{2(x+1)}$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{3}{2}\times\frac{1}{x-1}$ هي الدالة $x\mapsto\frac{3}{2}Ln(x-1)$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{3}{2}\times\frac{1}{x+1}$ هي الدالة $x\mapsto\frac{3}{2}Ln(x+1)$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x+1$ هي الدالة $x\mapsto\frac{x^2}{2}+x$

و بالتالي الدالة الأصلية للدالة h هي F حيث $F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}Ln(x-1)-\frac{3}{2}Ln(x+1)$.

تطبيق 18 تعيين دالة أصلية لدالة مثلثية

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\cos^3 x$

1) باستعمال العلاقة $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ بين أن $f(x)=\cos x-\cos x\sin^2 x$

2) استنتج دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

الحل ✓

1) من العلاقة $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ نجد $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

منه $f(x)=\cos x\cos^2 x=\cos x(1-\sin^2 x)=\cos x-\cos x\sin^2 x$

الدالة $x\mapsto\cos x\sin^2 x$ من الشكل $x\mapsto u'(x)u^2(x)$ حيث $u(x)=\sin x$

و بالتالي فإن دالتها الأصلية هي $x\mapsto\frac{\sin^3 x}{3}$

إذن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث $F(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$



تطبيق 19 تعيين دالة أصلية لدالة مثلثية

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sin^2 x\cos^3 x$

1) بين أن $f(x)=\cos x\sin^2 x-\cos x\sin^4 x$

2) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

الحل ✓

1) لدينا $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ منه $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

إذن $f(x)=\sin^2 x\cos x\cos^2 x$

$=\sin^2 x\cos x(1-\sin^2 x)=\cos x\sin^2 x-\cos x\sin^4 x$

2) الدالة $x \mapsto \cos x \sin^4 x$ من الشكل $x \mapsto u'(x)(u(x))^4$

و بالتالي دالتها الأصلية هي $x \mapsto \frac{1}{5}(u(x))^5$ أي $x \mapsto \frac{1}{5}\sin^5 x$

الدالة $x \mapsto \cos x \sin^2 x$ من الشكل $x \mapsto u'(x)(u(x))^2$

و منه فإن دالتها الأصلية هي $x \mapsto \frac{1}{3}(u(x))^3$ أي $x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x$

إذن الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x$.

و بصفة عامة إذا كانت $f(x) = a\cos^n x \sin^p x$ مع p و n طبيعيين غير معدومين فإن:

- إذا كان احدهما فردي و الآخر زوجي نستعمل المساواة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ التي تسمح لنا بكتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = \sin x \times q(\cos x)$ حيث q دالة كثيرة حدود و بهذه الكتابة نستطيع تعيين دالة أصلية لـ f .
- إذا كان p و n كليهما زوجي نستعمل الكتابة الخطية مما يسمح لنا بكتابة $f(x)$ على شكل مجاميع من الشكل $\lambda \cos(\alpha x)$ او $\mu \sin(\beta x)$ و التي دالتها الأصلية معروفة.

تطبيق 20 تعيين دالة أصلية لدالة أسية

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 e^{3x}$

أوجد دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ بحيث $F(x) = p(x)e^{3x}$ مع p دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة.

✓ الحل

$p(x)$ من الدرجة الثالثة هذا يعني أن $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

حيث a ، b ، c ، d أعداد حقيقية و $a \neq 0$

بما أن F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

فإنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $F'(x) = p'(x)e^{3x} + 3e^{3x}p(x) = e^{3x}(p'(x) + 3p(x))$

$= [3ax^3 + (3a+3b)x^2 + (2b+3c)x + c + 3d]\, e^{3x}$

و لدينا من جهة أخرى $F'(x) = f(x)$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد $a = \frac{1}{3}$ ، $b = \frac{-1}{3}$ ، $c = \frac{2}{9}$ و $d = \frac{-2}{27}$

ومنه $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}\right)e^{3x}$

تطبيق 21 حساب القيمة المتوسطة لدالة

احسب القيمة المتوسطة M للدالة f حيث $y = f(x) = \cos^2(\alpha x)$ على المجال $\left[0 , \frac{\pi}{\alpha}\right]$

✓ الحل

$$M = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos^2(\alpha t)\,dt$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\frac{1+\cos(2\alpha t)}{2}\right)dt = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha t)\right]dt$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\alpha}\sin(2\alpha t)\right]_0^{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi}\,\frac{\pi}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

تطبيق 22 تعيين اتجاه تغير دالة أصلية

F دالة معرفة بـ $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

أ) احسب $F(0)$ ثم $F'(x)$ ، ب) ادرس اتجاه تغيرات الدالة F .

✓ الحل

1) $F(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = 0$

الدالة $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي تقبل دالة أصلية F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2) بما أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $\frac{1}{1+x^2} > 0$ فإن $F'(x) > 0$

و منه فإن F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

تطبيق 23 حساب التكاملات باستعمال الدالة الأصلية

احسب التكاملات التالية ،

أ) $I=\int_0^2 (x-2)dx$ ، ب) $I=\int_0^1 (t^2-3t+1)dt$

جـ) $I=\int_0^1 (2t+1)(t^2+t)^3 dt$ ، د) $I=\int_{Ln2}^{Ln3} e^{2x} dt$

هـ) $I=\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dt$ ، و) $I=\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{2+t}}$

ن) $I=\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{3x+4}} dx$ ، ي) $I=\int_{-2}^{-1} \frac{x-5}{x}$

✓ الحل

أ) $I=\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_0^2=[2-4]-(0)=-2$

ب) $I=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+t\right]_0^1=-\frac{1}{6}$

جـ) $I=\left[\frac{(t^2+t)^4}{4}\right]_0^1=4$

د) $I=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{Ln2}^{Ln3}=\frac{1}{2}e^{Ln9}-\frac{1}{2}e^{Ln4}=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$

هـ) $I=\int_0^1 \frac{3}{2}\times\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{3}{2}\int_0^1 u'(x)u^{-2}(x)dx$

$=\left[\frac{-3}{2u(x)}\right]_0^1=\left[\frac{-3}{2(x^2+1)}\right]_0^1=\frac{3}{4}$

و) $I=\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{2+t}}=\int_0^3 \frac{(2+t)'}{\sqrt{2+t}}dt=\left[2\sqrt{2+t}\right]_0^3=2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

ن) $I=\int_0^4 \frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{3x+4}}dx=\frac{1}{3}\int_0^4 \frac{(3x+4)'}{\sqrt{3x+4}}dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\right]_0^4=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

ي) $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x-5}{x}dx=\int_{-2}^{-1}\left(1-\frac{5}{x}\right)dx=\left[x-5Ln(-x)\right]_{-2}^{-1}=1+5Ln2$

تطبيق 24 تعيين دالة أصلية باستعمال علاقة شال و مساحة قرص

f معرفة على $[-1,+\infty[$ بـ $\begin{cases} f(x)=\sqrt{4-(x-1)^2},\ x\in[-1\ ,\ 1] \\ f(x)=\frac{2}{x}\ ,\ x\geq 1 \end{cases}$

1) بين أن منحنى الدالة f على المجال $[-1\ ,\ 1]$ هو ربع دائرة ثم مثل بيان f

2) استعمل علاقة شال لحساب التكاملين $I=\int_{-1}^{3} f(x)dx$ ،

$J=\int_4^{-1} f(x)dx$

✓ الحل

1) من اجل كل x من $[-1\ ,\ 1]$ نضع $y=\sqrt{4-(x-1)^2}$ بتربيع الطرفين نجد $y^2=\left(4-(x-1)^2\right)$ ومنه نستنتج $(x-1)^2+y^2=4$ إذن النقطة $M(x\ ,\ y)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $\Omega(1,0)$ و طول نصف قطرها $R=2$.

و بما ان $x\in[-1,1]$ و $y>0$

فإن (γ) هو ربع دائرة

2) $I=\int_{-1}^{3} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{3} f(x)dx$

$I=\frac{1}{4}S+2\left[Lnx\right]_1^3=\frac{1}{4}\pi\times4+2Ln2=\pi+2Ln2$ حيث (S مساحة الدائرة)

$J=\int_4^{-1} f(x)dx=\int_4^{1} f(x)dx+\int_1^{-1} f(x)dx$

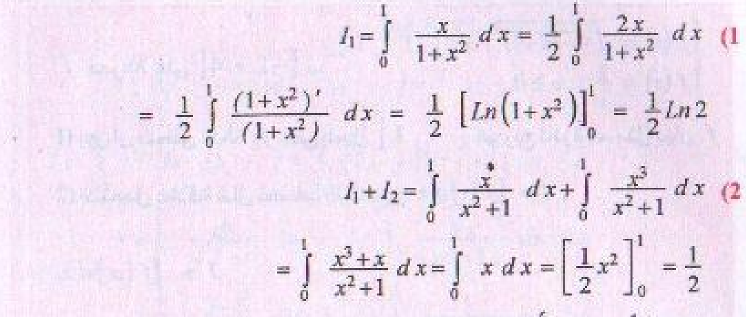
$=\left[2Ln(x)\right]_4^1-\int_{-1}^{1} f(x)dx=-2Ln4-\pi$

تطبيق 25 حساب التكاملات

1) احسب $I_1=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$

2) احسب I_2+I_1 إذا علمت أن $I_2=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$ ثم استنتج قيمة I_2 .

✓ الحل



1) $I_1=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)}\,dx=\frac{1}{2}\left[Ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}Ln\,2$

2) $I_1+I_2=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx+\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

$=\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2+1}\,dx=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

إذن $\begin{cases} I_1+I_2=\frac{1}{2} \\ I_1=\frac{1}{2}Ln\,2 \end{cases}$ منه نجد $I_2=\frac{1}{2}-I_1$ اي $I_2=\frac{1}{2}(1-Ln\,2)$

تطبيق 26 حصر تكامل دالة

1) مثل الدالة f المعرفة على $[0\ ,\ 1]$ ب $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ (الوحدة 8cm)

(جزئ المجال $[0\ ,\ 1]$ إلى 8 مجالات متساوية الطول).

2) باستعمال طريقة المستطيلات احصر مساحة الحيز من المستوي تحت منحني الدالة f ثم احسب سعة هذا الحصر و التي تمثل حاد من الأعلى للفرق بين مساحة المستطيلات الكبرى و مساحة المستطيلات الصغرى

استنتج حصرا لـ $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

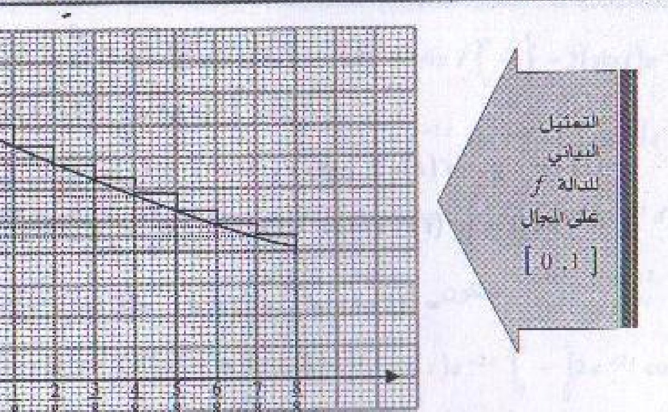
✓ الحل

2) $\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(\frac{k}{8}\right)\ge \mathcal{A}\ge \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(\frac{k-1}{8}\right)$

ومنه $314\times 10^{-15}\ge \mathcal{A}\ge 213\ ,\ 28\times 10^{-15}$

سعة الحصر هي $M=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(\frac{k}{8}\right)-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(\frac{k-1}{8}\right)\approx 1{,}0072\times 10^{-13}$

إذن $314\times 10^{-15}\ge \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt\ge 213\ ,\ 28\times 10^{-15}$



تطبيق 27 تعيين دالة أصلية باستعمال التكامل بالتجزئة

باستعمال التكامل بالتجزئة عين الدالة الأصلية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية على المجال المعطى و التي تنعدم عند a

1) $f(x)=(2x+1)Ln\,x$ ، $I=]0\ ,\ +\infty[$ ، $a=1$

2) $f(x)=(2x+1)e^x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=0$

3) $f(x)=x\cos x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=\frac{\pi}{2}$

4) $f(x)=(Ln\,x)^2$ ، $I=]0\ ,\ +\infty[$ ، $a=1$

5) $f(x)=e^{-2x}\cos x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=0$

✓ الحل

1) بوضع $u'(x)=2x+1$ و $v(x)=Ln\,x$ يكون $u(x)=x^2+x$ و $v'(x)=\frac{1}{x}$

$F(x)=\int_1^x u'(t)v(t)\,dt=\left[u(t)v(t)\right]_1^x-\int_1^x u(t)v'(t)\,dt$

$=\left[u(t)\,v(t)\right]_1^x-\int_1^x \frac{t^2+t}{t}\,dt=\left[(t^2+t)Ln\,t\right]_1^x-\int_1^x (t+1)\,dt$

$=\left[(t^2+t)Ln\,t-\frac{t^2}{2}-t\right]_1^x=\left[(x^2+x)Ln\,x-\frac{x^2}{2}-x\right]-\left[-\frac{1}{2}-1\right]$

$$=(x^2+x)Ln(x)-\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}$$

2) $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x (2t+1)e^t dt$

بوضع $u(t)=2t+1$ و $v'(t)=e^t$ يكون $u'(t)=2$ و $v(t)=e^t$

$$F(x)=\int_0^x u(t)v'(t)dt=[u(t)v(t)]_0^x-\int_0^x u'(t)v(t)dt$$

$$=[(2t+1)e^t]_0^x-\int_0^x 2e^t dt=[(2t+1)e^t-2e^t]_0^x$$

$$=(2x+1)e^x-2e^x+1=e^x(2x-1)+1$$

3) $f(x)=x\cos x$ و $F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt$

بوضع $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=\cos t\end{cases}$ فيكون $\begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=\sin t\end{cases}$

$$F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^x u(t)v'(t)dt=[u(t)v(t)]_{\frac{\pi}{2}}^x-\int_{\frac{\pi}{2}}^x u'(t)v(t)dt$$

$$=[t\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^x-\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin t\,dt=x\sin x-\frac{\pi}{2}+[\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^x$$

$$=x\sin x-\frac{\pi}{2}+\cos x$$

4) بوضع $\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=(Ln x)^2\end{cases}$ فيكون $\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=\frac{2}{x}Ln x\end{cases}$

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x u'(t)v(t)dt=[u(t)v(t)]_1^x-\int_1^x [u(t)v'(t)]dt$$

$$=[t(Lnt)^2]_1^x-\int_1^x 2Lnt\,dt=[t(Lnt)^2]_1^x-[2(tLn(t)-t)]_1^x$$

$$=[t(Lnt)^2-2tLn(t)+2t]_1^x=x(Lnx)^2-2xLn\,x+2x-2$$

5) $F(x)=\int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt$

بوضع $\begin{cases}u(t)=e^{-2t}\\ v'(t)=\cos t\end{cases}$ فيكون $\begin{cases}u'(t)=-2e^{-2t}\\ v(t)=\sin t\end{cases}$

$$F(x)=\int_0^x u(t)v'(t)dt=[e^{-2t}\sin t]_0^x-\int_0^x -2(\sin t)e^{-2t}dt$$

$$=e^{-2x}\sin x+2\int_0^x (\sin t)(e^{-2t})dt$$

نضع $G(x)=\int_0^x (\sin t)e^{-2t}dt$ ونستعمل التكامل بالتجزئة مرة أخرى لتعيين الدالة G

بوضع $\begin{cases}u'(t)=\sin t\\ v(t)=e^{-2t}\end{cases}$ فيكون $\begin{cases}u(t)=-\cos t\\ v'(t)=-2e^{-2t}\end{cases}$

$$G(x)=[(-\cos t)e^{-2t}]_0^x-\int_0^x 2e^{-2t}\cos t\,dt$$

$$G(x)=-(\cos x)e^{-2x}+1-2F(x)$$

إذن $F(x)=e^{-2x}\sin(x)-2(\cos x)e^{-2x}+2-4F(x)$

$$5F(x)=e^{-2x}\sin x-2(\cos x)e^{-2x}+2$$

$$5F(x)=e^{-2x}[\sin x-2\cos x]+2$$

$$F(x)=\frac{1}{5}e^{-2x}[\sin x-2\cos x]+\frac{2}{5}$$

تطبيق 28 حساب التكامل باستعمال التجزئة

نعتبر التكامل التالي $I_{(n,k)}=\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$ حيث n و k عددان طبيعيان غير معدومين و $k\le n$

1) أوجد علاقة بين $I_{(n,k)}$ و $I_{(n,k-1)}$ ثم استنتج $I_{(n,k)}$ بدلالة n و k

2) احسب $I_{(2,1)}$ و $I_{(5,2)}$

الحل

1) لإيجاد علاقة بين $I_{(n,k)}$ و $I_{(n,k-1)}$ نستعمل التكامل بالتجزئة

بوضع $u'(x)=kx^{k-1}$ يكون $u(x)=x^k$

$v(x)=-\frac{1}{n-(k-1)}(1-x)^{n-(k-1)}$ يكون $v'(x)=(1-x)^{n-k}$

و عليه $I_{(n,k)}=-\frac{1}{n-(k-1)}\left([x^k(1-x)^{n-(k-1)}]_0^1-\int_0^1 kx^{k-1}(1-x)^{n-(k-1)}dx\right)$

أي $I_{(n,k)} = \frac{k}{n-(k-1)} \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-(k-1)}\, dx = \frac{k}{n-(k-1)} I(n , k-1)$

لدينا $I_{(n,k)} = \frac{k}{n-(k-1)} I(n , k-1) = \frac{k}{n-(k-1)} \cdot \frac{k-1}{n-(k-2)} I(n , k-2)$

$$= \frac{k}{n-(k-1)}\,\frac{k-1}{n-(k-2)}\,\frac{k-2}{n-(k-3)}\; I(n , k-3)$$

$$= \frac{k}{n-(k-1)}\,\frac{k-1}{n-(k-2)}\,\frac{k-2}{n-(k-3)} \cdots \frac{2}{n-1}\,\frac{1}{n} I(n ,0)$$

$$= \frac{k!(n-k)!}{n!} I(n ,0)$$

إذن $I(n,k) = \frac{k!(n-k)!}{n!} I(n ,0)$

لكن $I_{(n,0)} = \int_0^1 (1-x)^n dx = -\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

و بالتالي $I_{(n,k)} = \frac{k!(n-k)!}{n!} \times \frac{1}{n+1}$

2) $I_{(2,1)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ و $I_{(5,2)} = \frac{1}{60}$

تطبيق 29

حساب مساحة حيز من المستوي

g دالة معرفة على $]1 , +\infty[$ ب $g(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

1) بين أن $g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

ماهي المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة g .

2) احسب مساحة حيز المستوي المحدود بمنحنى g و المستقيمات التي معادلاتها $y=x+2$ و $x=4$ و $x=m$ مع $m \rangle 4$.

عين نهاية هذه المساحة لما $m \to +\infty$

✔ الحل

1) من اجل كل $x \neq 1$ لدينا

$$x+2+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-1)^2+3(x-1)+1}{(x-1)^2} = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

بما أن $\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x=1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة g .

بما أن $\lim_{|x|\to+\infty} g(x)-(x+2)=0$ فإن المنحني له مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+2$ بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$

2) من اجل كل $x \rangle 4$ لدينا $g(x)-(x+2) \rangle 0$ و منه المنحني (γ) للدالة g يقع فوق المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+2$

و عليه فالمساحة بين (γ) و (Δ) هي $S=\int_4^m [\,g(x)-(x+2)\,]\,dx$

$$S=\int_4^m \left(\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \left[3\,Ln(x-1)-\frac{1}{x-1}\right]_4^m$$

$$=\left(3\,Ln(m-1)-\frac{1}{m-1}-3\,Ln\,3+\frac{1}{3}\right)$$

$$\lim_{m\to+\infty} S=+\infty$$

تطبيق 30

حساب مساحة حيز من المستوي

f دالة معرفة على $]0 , +\infty[$ ب $f(x)=\frac{1}{x}(1+Ln\,x)$.

1) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=3\,cm$

2) عين m فاصلة نقطة تقاطع (γ) مع محور الفواصل.

3) ليكن S_1 الحيز المحصور بين (γ) و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=\frac{1}{e}$ و $x=1$ و ليكن S_2 الحيز المحصور بين (γ) و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=1$ و $x=a$ مع $a \rangle 1$ عين a بحيث ان الحيزين S_1 و S_2 لهما نفس المساحة.

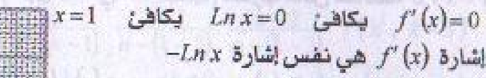
✔ الحل

1) $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to 0}(1+Ln\,x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\times\infty$ عدم التعيين

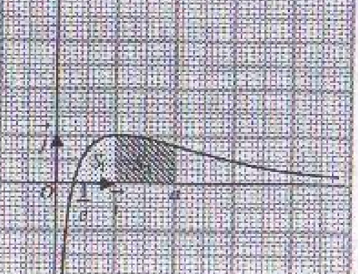
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{Ln\,x}{x}\right)=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=\overset{+}{0}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

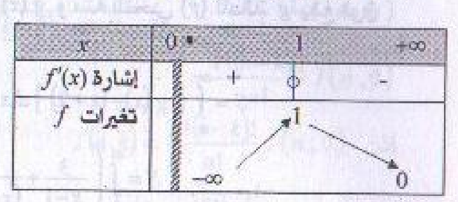
الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0\ ,\ +\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{-Ln\,x}{x^2}$



$f'(x)=0$ يكافئ $Ln\,x=0$ يكافئ $x=1$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $-Ln\,x$





x	0		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	+	0	-	
تغيرات f	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

2) فاصلة نقطة التقاطع (γ) مع $(x\,x')$ هي حل للمعادلة $f(x)=0$

$f(x)=0$ يكافئ $1+Ln\,x=0$ يكافئ $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

إذن $m=\frac{1}{e}$

3) $S_1=\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(t)\,dt=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{1}{t}+\frac{Ln\,t}{t}\right)dt=\left[Ln\,t+\frac{1}{2}(Ln\,t)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$

$=-Ln\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{2}\left(Ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (وحدة المساحة)

إذن $S_1=\frac{9}{2}cm^2$

$S_2=\left[Ln\,t+\frac{1}{2}(Ln\,t)^2\right]_1^a=Ln\,a+\frac{1}{2}(Ln\,a)^2$

$S_2=9\left[Ln\,a+\frac{1}{2}(Ln\,a)^2\right]cm^2$

$S_2=S_1$ يكافئ $9\left[Ln\,a+\frac{1}{2}(Ln\,a)^2\right]=\frac{9}{2}$ يكافئ $2Ln(a)+(Ln(a))^2=1$

بوضع $Ln(a)=\alpha$ نجد $\alpha^2+2\alpha-1=0$ ... (*)

$\Delta=4-4(1)(-1)=8$ و منه المعادلة (*) لها حلان $\alpha_1=-1+\sqrt{2}$ و $\alpha_2=-1-\sqrt{2}$

الحالة الأولى $\alpha=\alpha_1$

$Ln\,a=\alpha_1$ يكافئ $a=e^{-1+\sqrt{2}}$ مقبول

الحالة الثانية $\alpha=\alpha_2$:

$Ln\,a=\alpha_2$ يكافئ $a=e^{-1-\sqrt{2}}$ ($a\langle 1$) مرفوض إذن قيمة a المطلوبة هي $e^{-1+\sqrt{2}}$

تطبيق 31 حساب المساحة بين منحنيين و محور الفواصل

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{-x}$ و $g(x)=(x+1)e^{-x}$

1) ادرس تغيرات الدالتين f و g ثم ارسم منحنيهما البيانيين (C_f) و (C_g) في معلم متعامد و متجانس طول الوحدة 1 cm

2) نعتبر المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x=m$ مع $m\rangle 0$ باستعمال التكامل بالتجزئة احسب بدلالة m المساحة $S(m)$ لحيز المستوي المحدود بين $(x\,x')$ و المستقيم (Δ) و المنحنيين (C_f) و (C_g)

3) ماهي نهاية هذه المساحة لما m يؤول إلى $(+\infty)$

✓ الحل

1) دراسة تغيرات f :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=-e^{-x}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $f'(x)\langle 0$

و بالتالي فإن الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها

دراسة تغيرات g :

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+x\,e^{-x}\right)=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$

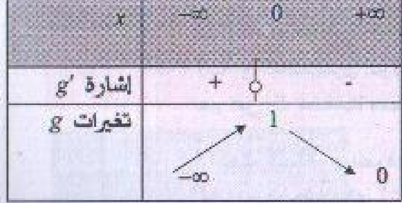
$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(1+x)=-\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=-x\,e^{-x}$

$g'(x)=0$ يكافئ $x=0$

إذا كان $x\rangle 0$ فإن $g'(x)\langle 0$ و إذا كان $x\langle 0$ فإن $g'(x)\rangle 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0



x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة g'		+	0	-	
تغيرات g	$-\infty$	↗	1	↘	0

(C_g) يقطع $(x\,x')$ في النقطة $A(-1,0)$

2) $S(m)=\int_{-1}^{0} g(x)\,dx+\int_{0}^{m} f(x)\,dx$

$$= \int_{-1}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{m} e^{-x}\,dx$$

$$\int_{0}^{m} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{0}^{m} = -e^{-m}+1$$

نحسب $\int_{-1}^{0} g(x)\,dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة.

بوضع $\begin{cases} u(x)=x+1 \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases}$ ، يكون $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} u(x)v'(x)\,dx = \left[-e^{-x}(x+1)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^{-x}\,dx$$

$$= \left[e^{-x}(-x-2)\right]_{-1}^{0} = (-2)-(e)(-1) = -2+e$$

إذن $S(m) = -2+e-e^{-m}+1 = -e^{-m}+e-1$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} S(m) = \lim\limits_{m\to+\infty}\left(-e^{-m}+e-1\right) = e-1$

تطبيق 32 حساب المساحات

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x-2)+e^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ ثم حدد الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

2) λ عدد حقيقي موجب، نعتبر حيز المستوي المحدود بـ (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=0$ و $x=\lambda$.
عبر عن S_1 مساحة هذا الحيز بدلالة λ.

3) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=e^{1-x}$
A نقطة إحداثياتها $(\lambda\,,\,0)$ و B نقطة من (C_g) فاصلتها λ. المماس لـ (C_g) عند B يقطع محور الفواصل في نقطة C.
- احسب إحداثيات C ثم مساحة المثلث ABC S_2.
- بين أن S_1+2S_2 مستقل عن λ.

الحل

1) $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ إذا وفقط إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=0$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}=0$
فإن $y=x-2$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)
لدينا $f(x)-(x-2)=e^{1-x}$
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $e^{1-x}>0$ و منه فإن المنحنى (C_f) يقع فوق (Δ)

2) بما أن المنحنى (C_f) يقع فوق (Δ) فإن المساحة S_1 هي

$$S_1 = \int_{0}^{\lambda}\left[f(x)-(x-2)\right]dx = \int_{0}^{\lambda} e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_{0}^{\lambda} = -e^{1-\lambda}+e$$

3) $A(\lambda\,,\,0)$ ، $B(\lambda\,,\,e^{1-\lambda})$

المماس لـ (C_g) عند B معادلته $y=-e^{1-\lambda}(x-\lambda)+e^{1-\lambda}$

فاصلة نقطة تقاطع المماس مع (xx') هي حل للمعادلة $-e^{1-\lambda}(x-\lambda)+e^{1-\lambda}=0$

$-e^{1-\lambda}(x-\lambda)+e^{1-\lambda}=0$ يكافئ $\lambda e^{1-\lambda}+e^{1-\lambda}=x\,e^{1-\lambda}$ يكافئ $x=\lambda+1$

منه $C(\lambda+1\,,\,0)$

مساحة المثلث ABC هي $S_2=\dfrac{e^{1-\lambda}}{2}$

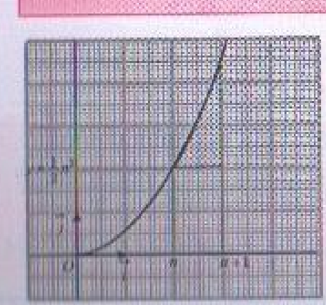
ومنه $S_1+2S_2=-e^{1-\lambda}+e+e^{1-\lambda}=e$ مستقل عن λ

تطبيق 33 حساب المساحات

(γ) جزء من قطع مكافئ ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x^2$ مع $x\geq 0$.

n عدد طبيعي و U_n مساحة حيز المستوي المحدد بـ (γ) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=n+1$ و $y=\frac{1}{2}n^2$. بين أن المتتالية (U_n) حسابية

الحل



$$U_n = \int_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}n^2\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}n^2x\right]_{n}^{n+1}$$

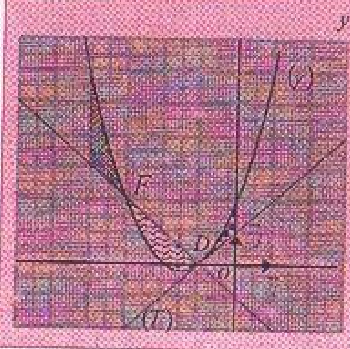
$$= \frac{1}{6}(n+1)^3-\frac{1}{2}n^2(n+1)-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^3 = \frac{1}{2}n+\frac{1}{6}$$

بما أن $U_n=an+b$ فإنها حسابية أساسها النصف و حدها الأول السدس

تطبيق 34 — حساب المساحات



(γ) قطع مكافئ معادلته $y=x^2+3x+2$



1) اكتب معادلة المماس (T) لـ (γ) عند النقطة $D(-1,0)$

2) اعط معادلة المستقيم (DF) حيث $F(-3,2)$

3) احسب المساحة الملونة في الشكل.

الحل

1) دالة القطع المكافئ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $y'=f'(x)=2x+3$ و منه $f'(-1)=1$ إذن $y=x+1$ ، (T)

2) $y=ax+b$ ، (DF)

$D\in(DF)$ تكافئ $-a+b=0$ ... (1)

$F\in(DF)$ تكافئ $-3a+b=2$ ... (2)

من (1) و (2) نجد $a=-1$ و $b=-1$ منه $y=-x-1$ ، (DF)

3) على المجال $[-4\ ,\ -3]$ المنحني يقع فوق (DF)

و على المجال $[-3\ ,\ -1]$ المنحني يقع تحت (DF)

و على المجال $[-1\ ,\ 0]$ المنحني يقع فوق (T) و عليه

$$S=\int_{-4}^{-3}\left(-y_{(DF)}+f(x)\right)dx+\int_{-3}^{-1}\left(y_{(DF)}-f(x)\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(f(x)-y_{(T)}\right)dx$$

$$=\int_{-4}^{-3}\left(x^2+4x+3\right)dx+\int_{-3}^{-1}\left(-x^2-4x-3\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x+1\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x\right]_{-4}^{-3}+\left[-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x\right]_{-3}^{-1}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{64}{3}-20+\frac{1}{3}+3+\frac{1}{3}=\frac{64-60+1+9+1}{3}=\frac{15}{3}=5$$

إذن $S=5$ وحدة مربعة.

تطبيق 35 — حساب مساحة القطع الناقص و الدائرة

1) بين أن مساحة ربع قرص مركزه النقطة o و نصف قطره a مع $0 \langle a$ موجود في الربع الأول من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس هي

$$\mathcal{A}_D=\frac{\pi}{4}a^2=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

2) ليكن (E) قطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ مع $0\langle a$ و $0\langle b$

احسب المساحة $\mathcal{A}_{(E)}$ للقطع الناقص

الحل

1) الدائرة التي مركزها o و نصف قطرها a معادلتها $x^2+y^2=a^2$

و منه $y=\sqrt{a^2-x^2}$ إذن مساحة ربع القرص تساوي ربع مساحة القرص أي $\frac{1}{4}\pi a^2$

و من جهة ثانية هذه المساحة تمثل مجموعة النقط M المعرفة بـ :

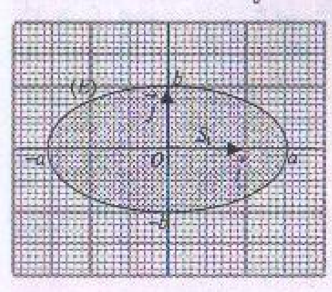
$a\ge x\ge 0$ و $\sqrt{a^2-x^2}\ge y\ge 0$ أي $\mathcal{A}_D=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

2) مساحة القطع الناقص تساوي $4S_1$

و هذا سبب التناظرات الموجودة في هذا الشكل

S_1 هي مجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث

$a\ge x\ge 0$ و $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ge y\ge 0$



$$\mathcal{A}_{(E)}=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\int_0^a 4\,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4\,\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\times\frac{\pi a^2}{4}=\pi ab$$

تطبيق 36 — حساب حجم المخروط الدوراني

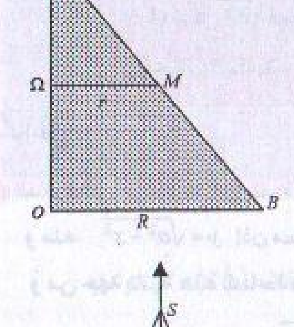
في معلم للفضاء نعتبر المخروط الدوراني الذي رأسه النقطة $S(0,0,4)$ و قاعدته دائرة مركزها النقطة O و نصف قطرها 2 من المستوي (xoy)

نقطع هذا المخروط بمستوي معادلته $Z=a$ حيث $0\le a\le 4$

1) عين نصف قطر الدائرة الناتجة من تقاطع المخروط و المستوي ذي المعادلة

$Z=a$ بدلالة a ثم عين مساحة قرص التقاطع.

2) استنتج حجم هذا المخروط بواسطة التكامل ثم احسبه بدلالة الدستور $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ حيث R نصف قطر دائرة القاعدة و h الارتفاع.



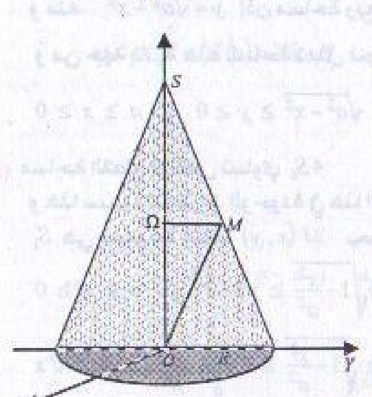
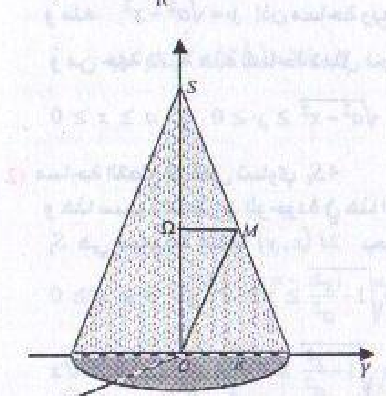
الحل

1) نصف قطر الدائرة هو ΩM

حسب نظرية طاليس لدينا $\frac{O\Omega}{OS}=\frac{\Omega M}{OB}$ و منه ،

$$r=\Omega M=\frac{OB\times O\Omega}{OS}=\frac{R\times a}{4}=\frac{aR}{4}$$

مساحة القرص هي πr^2 أي $\pi\frac{a^2R^2}{16}$

2)

$$V=\int_0^4 \frac{\pi a^2R^2}{16}\,da=\frac{\pi R^2}{16}\int_0^4 a^2\,da=\frac{\pi R^2}{16}\left[\frac{a^3}{3}\right]_0^4=\frac{\pi R^2\times 64}{16\times 3}=\frac{4}{3}\pi r^2$$

لدينا $V=\frac{\pi R^2}{3}h$ و $h=4$

و منه $V=\frac{4\pi R^2}{3}$

تطبيق 37 حساب حجم مجسم دوراني

في معلم متعامد و متجانس (p) قطع مكافئ معادلته ممثل في المجال $[-1\ ,\ 1]$.
بتدوير (p) حول محور التراتيب يولد مجسما دورانيا (Σ)
ماهي طبيعة مقطع من (Σ) بمستوي عمودي على (oy) ثم عبر بدلالة a حيث $1\geq a\geq 0$ عن مساحته $S(a)$ ثم احسب حجم (Σ).

الحل

طبيعة مقطع من (Σ) هي دائرة
معادلة المستوي القاطع لـ (Σ)
هي $y=a$ مع $1\geq a\geq 0$
مساحة المقطع الناتج من تقاطع (Σ)
مع المستوي $y=a$
هي πr^2 مع $r^2=1-a$ أي $\pi(1-a)$

$$V=\int_0^1 \pi(1-a)\,da=\left[\pi\left(a-\frac{a^2}{2}\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

طريقة (2) ، $V=\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^1(1-y)\,dy=\frac{\pi}{2}$

تطبيق 38 حساب حجم مجسم دوراني

f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=x+\frac{Lnx}{x}$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

1) احسب باستعمال التكامل بالتجزئة I حيث $I=\int_1^e Lnx\,dx$

2) H دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $H(x)=\frac{1}{x}(Lnx)^2-\frac{2}{x}Lnx-\frac{2}{x}$
بين أن H دالة أصلية لـ h حيث $h(x)=\frac{(Lnx)^2}{x^2}$

3) نعتبر في المعلم المتعامد و المتجانس للفضاء $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المجسم S الذي نحصل عليه بتدوير حول $(o,\vec{i})$ حيز المستوي المحدد بالمنحنى (γ) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=1$ و $x=e$ و (xx') احسب حجم (S) و ليكن V.

الحل

1) $I=\left[xLnx-x\right]_1^e=(e-e)-(-1)=1$

2) $H'(x)=\frac{1}{x^2}(Ln\,x)^2-\frac{2}{2x}Ln\,x+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^2}Ln\,x-\frac{2}{2x}=\frac{1}{x^2}(Ln\,x)^2=h(x)$

و منه الدالة H أصلية للدالة h

3) $V=\pi\int_1^e (f(x))^2\,dx=\pi\int_1^e\left[x^2+\left(\frac{Ln\,x}{x}\right)^2+2\,Ln\,x\right]dx$

$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e+\pi\left[H(x)\right]_1^e+2\pi=\pi\left[\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{-1}{e}-\frac{2}{e}\frac{-2}{e}\right)+2\right]$

$=\pi\left[\frac{1}{3}e^3-\frac{3}{e}+\frac{2}{3}\right]$ (وحدة الحجم)

$V=\pi\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{3}{e}+\frac{2}{3}\right)(2\,cm)^3=8\pi\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{3}{e}+\frac{2}{3}\right)cm^3$

تطبيق 39 حساب حجم جسم دوراني

(γ) قوس لمنحنى ممثل على $[\alpha\ ,\ \beta]$ لدالة من الشكل $f(x)=\sqrt{p(x)}$
حيث $p(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية موجب تماما على $[\alpha\ ,\beta]$.
ان تدوير (γ) حول (ox) يولد مجسما دورانيا نريد تعيين حجمه.
لتكن B_1 و B_2 مساحتي قاعدتي هذا المجسم و B_3 مساحة مقطع مجسم بالمستوي العمودي على (xx') و يبعد بنفس المسافة عن مستوي القاعدتين و ليكن $h=\beta-\alpha$

1) بين ان $V=\frac{h}{6}(B_1+B_2+4B_3)$

2) إرتفاع خزان ماء هو $48\ m$ نصفي قطري قاعدتيه هما R_1 و R_2
نعتبر ان حجمه هو حجم مجسم دوراني المولد بتدوير حول (xx') الحيز المحدد بالمنحني (γ) الذي معادلته $y=12\sqrt{1+\frac{x^2}{24^2}}$ و المستقيمات التي معادلتها $x=-36$ و $x=12$ و (xx') احسب حجم هذا المجسم .

الحل :

1) $V=\pi\int_\alpha^\beta (f(x))^2\,dx$

$V=\pi\int_\alpha^\beta p(x)\,dx=\pi\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx=\pi\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right]_\alpha^\beta$

$=\left[\frac{1}{3}a\beta^3+\frac{1}{2}b\beta^2+c\beta-\frac{1}{3}a\alpha^3-\frac{1}{2}b\alpha^2-c\alpha\right]\pi$

$=\left[\frac{1}{3}a(\beta^3-\alpha^3)+\frac{1}{2}b(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)\right]\pi$

$=(\beta-\alpha)\left[\frac{a}{3}(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+\frac{b}{2}(\alpha+\beta)+c\right]\pi$

$=\pi\left(\frac{\beta-\alpha}{6}\right)\left[2a(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+3b(\alpha+\beta)+6c\right]$

$=\frac{h}{6}\left[2a(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+3b(\alpha+\beta)+6c\right]\pi$

و لدينا $B_2=(a\beta^2+b\beta+c)\pi$ و $B_1=\pi(a\alpha^2+b\alpha+c)$

$B_3=\left[a\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+b\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+c\right]\pi$

$B_1+B_2+4B_3=2a(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+3b(\alpha+\beta)+6c$

اذن $V=\frac{h}{6}(B_1+B_2+4B_3)$

2) $\beta=12$ و $\alpha=-36$

و $\frac{\alpha+\beta}{2}=-12$

$B_2=\pi(180)$ و $B_1=\pi\times 468$

و $B_3=180\pi$ و $h=48$

اذن $V=\frac{48}{6}(4\times180\pi+180\pi+468\pi)=8\pi(4\times180+180+468)=10944\pi$

تطبيق 40 حساب التكامل بتبديل المتغير

نريد حساب التكامل $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

1) اثبت انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $\sin^2(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}$

2) باستعمال تبديل المتغير احسب $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

الحل :

1) من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

إذن $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

2) بوضع $x = \cos t$ يكون $dx = -\sin t\, dt$

لما $x = 0$ فان $t = \dfrac{\pi}{2}$ و لما $x = \dfrac{1}{2}$ فان $t = \dfrac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -\sqrt{1-\cos^2(t)}\sin t\, dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \sqrt{\sin^2(t)}\, dt$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \left|\sin t\right| dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(t)\, dt = -\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

إذن $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

تطبيق 41 دراسة تقارب المتتاليات المعرفة بواسطة التكامل

1) من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نضع $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\, dx$

أ) احسب باستعمال التكامل بالتجزئة العدد I_1

ب) بين انه من اجل كل $n \geq 1$ يكون $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\, dx$ ثم

استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

جـ) برهن باستعمال التكامل بالتجزئة انه من اجل كل عدد طبيعي

$n \geq 1$ يكون $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} - I_n$

2) نعتبر المتتالية الحقيقية (a_n) المعرفة بـ $a_1 = 0$ و من اجل كل عدد

طبيعي $n \geq 1$ ، $a_{n+1} = a_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

$a_n = \dfrac{1}{e} + (-1)^n I_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

الحل :

1) أ) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (1-x)\, e^{-x}\, dx$

نضع $\begin{cases} u(x) = 1-x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ منه نجد $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$I_1 = \int_0^1 u(x)\, v'(x)\, dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x)\, v(x)\, dx$$

$$= \left[-(1-x)e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\, dx$$

$$= \left[(x-1)e^{-x} + e^{-x}\right]_0^1 = \left[x e^{-x}\right]_0^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ب) من اجل كل عدد حقيقي x من $[0,1]$ لدينا $0 \leq 1-x \leq 1$ منه $0 \leq (1-x)^n \leq 1$ و

بضرب طرفي للتباينة في e^{-x} نجد $0 \leq (1-x)^n e^{-x} \leq e^{-x}$ بالمرور الى التكامل نجد

$0 \leq \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\, dx \leq \int_0^1 e^{-x}\, dx$ بالضرب في $\dfrac{1}{n!}$ نجد

$0 \leq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\, dx \leq \dfrac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\, dx$ اي $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\, dx$

$$\int_0^1 e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{1}{e}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\, dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!}\left(1-\dfrac{1}{e}\right) = 0$ وحسب نظرية الحصر فان $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

جـ) $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\, dx$

بوضع $\begin{cases} u'(x) = (1-x)^n \\ v(x) = e^{-x} \end{cases}$ نجد $\begin{cases} u(x) = \dfrac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 u'(x)v(x)\, dx = \frac{1}{n!}\left(\left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}e^{-x}\right]_0^1\right) - \frac{1}{n!}\int_0^1 u(x)v'(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}\right)e^0 - \frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{+1}{n+1}(1-x)^{n+1}e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - I_{n+1}$$

إذن $I_{n+1} = -I_n + \frac{1}{(n+1)!}$

2) $a_1 = 0$ و $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

إثبات أن $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$

نسمي p_n الخاصية " $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$ "

من أجل $n=1$ لدينا $a_1 = \frac{1}{e} + (-1)^1 I_1 = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0$ منه p_1 صحيحة.

نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي $n \geq 1$ أي $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$ و

نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $a_{n+1} = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}$.

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{e} + (-1)^{n+1}\left[-I_n + \frac{1}{(n+1)!}\right] = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

منه p_{n+1} صحيحة و بالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

ب) بما أن $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$ فإن $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{e}$

تطبيق 42 دراسة تقارب متتالية

f دالة معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{x} + Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1) أدرس تغيرات f على $I =]0, +\infty[$

2) α عدد حقيقي موجب تماما، باستعمال التكامل بالتجزئة احسب $\int_1^{\alpha} Ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ ثم $\int_1^{\alpha} f(t)\, dt$.

3) k عدد طبيعي غير معدوم.

أ) بين أن $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

ب) برهن أن $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} - f(k)$ ثم استنتج

$0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}$

4) أ) تحقق أن من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ يكون

$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ ...(1)

ب) نضع من أجل كل $n \geq 1$،

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

باستعمال المساواة (1) أعط عبارة مختصرة لـ S_n ثم بين أن المتتالية (S_n) متقاربة نحو عدد يطلب تعيينه.

جـ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون:

$0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n$ ثم استنتج

$\lim_{n \to +\infty} [f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)]$

5) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

بـ $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$

أ) تحقق باستعمال السؤال 3 فرع ب أن:

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = U_n - Ln(2) - Ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

ب) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الحل:

1) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} + Ln(x) - Ln(x+1)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(1 + x\, Ln(x)) - Ln(x+1) = +\infty$$

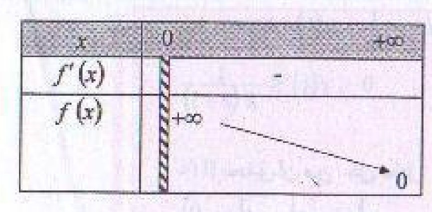
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على I و لدينا

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x-1+x}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

من أجل كل x من I لدينا $f'(x) < 0$

و منه f متناقصة تماما على I.



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$
$f(x)$	||	$+\infty \searrow 0$

2) $I_\alpha = \int_1^\alpha Ln\left(\frac{x}{x+1}\right) d x$

نضع $\begin{cases} u(x) = Ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

نجد $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x(x+1)} \\ v(x) = x \end{cases}$

$$I_\alpha = \int^\alpha u(x) v'(x)\, d x = \left[u(x) v(x)\right]_1^\alpha - \int^\alpha \frac{1}{x+1} d x$$

$$= \left[x\, Ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - Ln(x+1)\right]_1^\alpha$$

$$= \alpha\, Ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) - Ln(\alpha+1) + 2\, Ln(2)$$

$$\int^\alpha f(t) d t = \int^\alpha \frac{1}{t} d t + \int^\alpha Ln\left(\frac{t}{1+t}\right) d t = \int^\alpha \frac{1}{t} d t + I_\alpha$$

$$= Ln(\alpha) + I_\alpha = (\alpha+1) Ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) + 2\, Ln(2)$$

3) من اجل كل x من $[k \ , \ k+1]$ يكون $\frac{1}{k} \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{k+1}$ بالمرور إلى التكامل نجد

$$\frac{1}{k}(k+1-k) \ge \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \ge \frac{1}{k+1}(k+1-k) \quad \text{اي} \quad \frac{1}{k} \ge \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \ge \frac{1}{k+1}$$

ب) لدينا $\frac{1}{k} - f(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - Ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = -Ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} d x = \left[Ln(x)\right]_k^{k+1} = Ln(k+1) - Ln(k) = -Ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

منه نستنتج $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} d x = \frac{1}{k} - f(k)$

-لدينا $\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x} d x \le \frac{1}{k}$

و عليه نجد $\frac{1}{k+1} \le \frac{1}{k} - f(k) \le \frac{1}{k}$ بإضافة $-\frac{1}{k}$ إلى أطراف المتباينة الأخيرة نجد

$-\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \le -f(k) \le 0$ بالضرب في (-1)

نجد $0 \le f(k) \le \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ اي $0 \le f(k) \le \frac{1}{k(k+1)}$

4) أ) من اجل كل x من $I\!R - \{0 \ , \ 1\}$ لدينا $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

ب) $S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{2n(2n+1)}$

$$S_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n(2n+1)} = 0$$

منه (S_n) متتالية متقاربة نحو العدد 0.

ج) لدينا $\frac{1}{n(n+1)} \ge f(n) \ge 0$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} \ge f(n+1) \ge 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2n(2n+1)} \ge f(2n) \ge 0$$

بجمع أطراف المتباينات طرفا لطرف نجد $S_n \ge f(n) + f(n+1) + ... + f(2n) \ge 0$

بما ان $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$ و حسب نظرية الحصر فإن $\lim_{n\to+\infty} f(n) + f(n+1) + ... + f(2n) = 0$

5) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$

أ) $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} d x = \frac{1}{n} - f(n)$

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x} d x = \frac{1}{n+1} - f(n+1)$$

$$\vdots$$

$$\int_{2n}^{2n+1} \frac{1}{x} d x = \frac{1}{2n} - f(2n)$$

بجمع أطراف المتباينات طرفا لطرف نجد

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} d x = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right) - \left(f(n) + f(n+1) + ... + f(2n)\right)$$

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} d x = U_n - \left(f(n) + f(n+1) + ... + f(2n)\right)$$

منه نجد $f(n) + f(n+1) + ... + f(2n) = U_n - \int_n^{2n+1} \frac{1}{x} d x$

لكن $\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} d x = \left[Ln\, x\right]_n^{2n+1} = Ln(2n+1) - Ln(n) = Ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

$$= Ln(2) + Ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

إذن $f(n)+f(n+1)+...+f(2n)=U_n-Ln(2)-Ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

ب) لدينا من السؤال 5) أ)

$$U_n=f(n)+f(n+1)+...+f(2n)+\left[Ln(2)+Ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right]$$

و $\lim_{n\to+\infty} Ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=0$ و $\lim_{n\to+\infty} f(x)+f(n+1)+...+f(n+1)=0$

إذن $\lim_{n\to+\infty} U_n=Ln(2)$

و هذا يعني ان المتتالية (U_n) متقاربة نحو $Ln(2)$.

تطبيق 43 دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

نضع $I_n=\frac{1}{2^{n+1}}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$.

1) احسب I_0 باستعمال التكامل بالتجزئة.

2) برهن ان المتتالية (I_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) نضع $S_n=\sum_{k=0}^{n} I_k$ ، احسب S_n ثم عين نهاية للمتتالية (S_n) .

الحل

1) $I_0=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$

نضع $\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=\cos\frac{x}{2}\end{cases}$

نجد $\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=2\sin\frac{x}{2}\end{cases}$

$$I_0=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\left[u(x)v(x)\right]_{\pi}^{4n\pi}-\int_{\pi}^{4n\pi}u'(x)v(x)dx\right)$$

$$=\left[x\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{4n\pi}-\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4n\pi}2\sin\frac{x}{2}dx$$

$$=\left[x\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{4n\pi}+\left[2\cos\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{4n\pi}=4-\pi$$

2) $I_n=\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$ منه $I_n=\frac{1}{2^n}I_0$

$$I_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}I_0=\frac{1}{2^n}\times I_0\times\frac{1}{2}=I_n\times\frac{1}{2}$$

منه (I_n) متتالية هندسية أساسها $r=\frac{1}{2}$

3)

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}I_k=I_0+I_1+...+I_n=I_0\times\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=(4-\pi)\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$=2(4-\pi)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

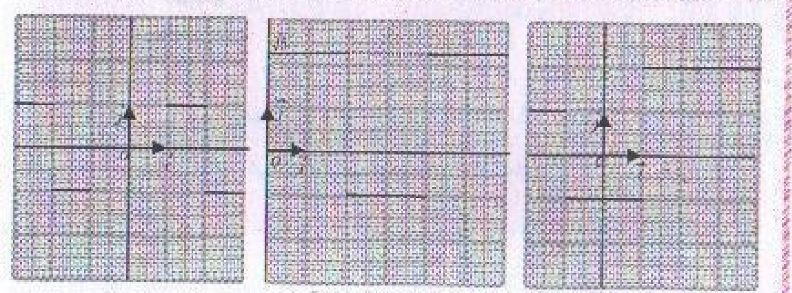
$$\lim_{n\to+\infty}S_n=2(4-\pi)$$

تمارين و مسائل

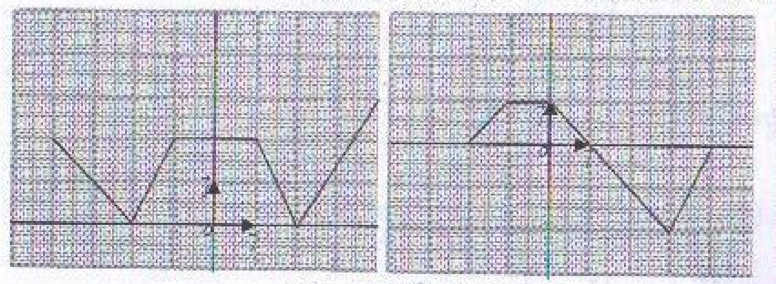
1 - مثل الدوال الدرجية f المعطاة ثم احسب التكامل $I(f)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\begin{cases} f(x)=5 , & 1 \geq x \geq -3 \\ f(x)=-4 , & 3 > x \geq 1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f(x)=-\sqrt{2} , & \sqrt{5} \geq x \geq -\sqrt{5} \\ f(x)=-2 , & 2\sqrt{5} > x \geq \sqrt{5} \end{cases}$

2 - كل شكل من الأشكال التالية يمثل التمثيل البياني لدالة درجية f ، عين عبارة $f(x)$ على كل مجال ثم احسب التكامل $I(f)$ على مجال تعريف الدالة f .



3 - في كل شكل من الأشكال التالية، الدالة التآلفية بالقطع f ممثلة بالمنحنى المعطى احسب باستعمال المساحات التكامل $I(f)$ على مجال تعريف f .



4 - f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{1}{2}x+5$ و $g(x)=5-x$

أ) ارسم (C_f) و (C_g) على المجال $[-5,7]$ في معلم متعامد ومتجانس.

ب) باستعمال حساب المساحات، احسب التكاملات التالية:

$\int_0^4 g(x)\,dx$ ، $\int_0^7 g(x)\,dx$ ، $\int_{-4}^0 f(x)\,dx$ ، $\int_0^7 f(x)\,dx$

5 - 1) نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{4-x^2}+1$ على المجال $[-2,2]$ بين أن التمثيل البياني للدالة f على المجال $[-2,2]$ في معلم متعامد ومتجانس هو نصف دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2) باستعمال الدستور الذي يعطي مساحة قرص، احسب التكاملات التالية:

$\int_{-2}^2 f(t)\,dt$ ، $\int_0^2 f(t)\,dt$ ، $\int_{-2}^0 f(t)\,dt$

6 - لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $[0,5]$ بـ:

$\begin{cases} f(x)=x+2 , & 1 \geq x \geq 0 \\ f(x)=-x+2 , & 2 \geq x > 1 \\ f(x)=x-4 , & 5 \geq x > 2 \end{cases}$ ، و $\begin{cases} g(x)=-x+3 , & 1 \geq x \geq 0 \\ g(x)=\frac{-1}{2}x+\frac{5}{2} , & 5 \geq x \geq 1 \end{cases}$

1) احسب تكامل كل من f و g على المجال $[0,5]$

2) استنتج التكاملين على $[0,5]$ للدالتين $f+2g$ و $-2f+g$

7 - في معلم متعامد و متجانس ارسم على المجال $[0,1]$ التمثيل البياني لكل من الدالتين $x \to x^2$ ، $x \to \sqrt{x}$

- إذا علمت أن $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}$ احسب $\int_0^1 x^2\,dx$ باستعمال التناظر المحوري.

8 - إذا علمت أن $\int_0^{\pi} \sin x\,dx=2$ احسب باستعمال التناظرات المعروفة للمنحنى ذي المعادلة $y=\sin x$ التكاملات التالية:

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ ، $J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$ ، $K=\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$ ، $H=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin x\,dx$

9 - من أجل كل قضية من القضايا التالية، بين إن كانت صحيحة أو خاطئة. وفي حالة هذه الأخيرة بين بمثال يبين ذلك.

لتعتبر الدالة f المعرفة والمستمرة على $\mathbb{R}$

1) $\int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx$

2) إذا كان $f \geq 0$ على $\mathbb{R}$ من اجل كل عدد حقيقي t يكون $\int_0^t f(x)\,dx \geq 0$

3) إذا كان $\int_0^2 f(x)\,dx$ موجب فإن f موجبة على $[0,2]$

10 - نعتبر دالتين f و g مستمرتين على المجال $[2,4]$ و بحيث :

$-3 \leq f(x) \leq 4$ و $-1 \leq g(x) \leq 5$

1) اعط حصرا للدالة $f+g$ ثم $3f-g$ على هذا المجال.

2) اعط حصرا لكل من التكاملين التاليين :

$\int_2^4 (f(x)+g(x))\,dx$ ، $\int_2^4 (3f(x)-g(x))\,dx$

11 - بين المتباينات التالية :

أ) $\int_{\frac{1}{3}}^1 Ln\,t\,dt \geq -\frac{2}{3}Ln3$ ، ب) $\frac{1}{3} \leq \int_1^2 \frac{1}{1+x}\,dx \leq \frac{1}{2}$ ، جـ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t^2)\,dt \leq 2$

12 - احسب حجم المجسم المولد بالدوران حول المحور (xx') للمساحة المحصورة بين المنحنيين ذوي المعادلات $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $y=\frac{1}{x}$ و $1 \leq x \leq e$.

13 - احسب حجم المجسم المولد بتدوير حول (xx') للمساحة المحصورة بين المنحنيين ذوي المعادلة $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$ و $1 \geq x \geq 0$.

14 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^2 x\,dx$

بين $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}$ ما هي نهاية المتتالية (I_n) ؟

15 - من اجل كل عدد حقيقي 0 .) x بين ان $\frac{x}{x+1} \leq Ln(x+1) \leq x$

يمكنك استعمال حصر الدالة f المعرفة بـ $f(t)=\frac{1}{1+t}$ على المجال $[0,x]$

16 - أ) باستعمال نظرية حصر القيمة المتوسطة للدالة $x \to \cos x$ على المجال $[x,y]$

بين ان $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$

ب) بطريقة مماثلة بين ان $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$

17 - 1) باستعمال دستور المكاملة بالتجزئة مرتين احسب $I=\int_0^3 x^2 e^{-2x}\,dx$.

2) لتكن f دالة معرفة على $[0,3]$ بالعبارة $f(x)=x\,e^{-x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس، طول الوحدة $4cm$. وليكن S المجسم المحصل عليه بالتدوير حول (xx') للمنحنى ذو المعادلة $y=f(x)$. عبر عن V بدلالة I ثم حدد قيمة مقربة لـ V حجم هذا المجسم الى $1cm^3$

18 - نريد حصر التكامل $J=\int_0^1 \frac{x\,e^x}{1+e^x}\,dx$

1) لتكن g دالة معرفة على $[0,1]$ بـ $g(x)=Ln(1+e^x)$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، A نقطة من (γ) فاصلتها معدومة و B نقطة من (γ) فاصلتها 1

أ) ادرس تغيرات الدالة g ثم عين معادلة المماس لـ (γ) في النقطة A

ب) p نقطة تقاطع المماس في A مع القطعة $[IB]$ حيث $I(1,0)$

احسب مساحة كل من الشكلين $OIPA$ و $OIBA$

2) نقبل ان المنحنى (γ) محصور بين القطعتين $[AP]$ و $[AB]$، بين ان

$$Ln2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x)\,dx \leq Ln\sqrt{2(1+e)}$$

3) باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن J بدلالة $\int_0^1 g(x)\,dx$ ثم استنتج حصرا لـ J

19 - عين الدالة الأصلية للدالة f على المجال المعطى باستعمال الدساتير الشهيرة :

1) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+3}$ و $I=\mathbb{R}$ ؛ 2) $f(x)=\frac{3}{2x-6}$ و $I=]3,+\infty[$

3) $f(x)=\frac{2x^2}{x^3+1}$ و $I=]-1,+\infty[$ ، 4) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

5) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$ و $I=]0,+\infty[$ ، 6) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{-3}{x}}$ و $I=]0,+\infty[$

7) $f(x)=-5e^{-4x+3}$ و $I=\mathbb{R}$ ، 8) $f(x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}$ و $I=\mathbb{R}$

9) $f(x)=\cos x - x\sin x$ و $I=\mathbb{R}$

10) $f(x)=\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$ و $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

11) $f(x)=\frac{1-Ln\, x}{x^2}$ و $I=]0,+\infty[$

12) $f(x)=Tan\, x+x\, Lan^3\, x$ و $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

20 - u و v دالتان معرفتان على $I=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ بـ $u(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ و $v(x)=\frac{1}{\cos^4 x}$

1) تحقق انه من اجل كل x من I يكون $u'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$

2) أوجد دالة اصلية لـ v على I التي تنعدم عند الصفر.

(مشتق الدالة $x\to Tan(x)$ هي الدالة $x\to 1+Tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$)

21 - في كل ما يلي f دالة ناطقة معرفة على مجال معطى بين ان $f(x)$ تكتب على الشكل المعطى، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f :

1) $f(x)=\frac{x+2}{x+3}$ ، $f(x)=a+\frac{b}{x+3}$ ، $I=]-3,+\infty[$

2) $f(x)=\frac{3x+5}{4x+2}$ ، $f(x)=a+\frac{b}{4x+2}$ ، $I=]-\frac{1}{2},+\infty[$

3) $f(x)=\frac{x^2+3x+4}{x+2}$ ، $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$ ، $I=]-2,+\infty[$

4) $f(x)=\frac{5x^3+4x^2+2x+1}{(x+2)^2}$ ، $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+2)^2}$ ، $I=]-2,+\infty[$

22 - f و g و h دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sin x+\cos^3 x$ و $g(x)=\sin^4 x\cos^5 x$ و $h(x)=\cos^2 x\sin^4 x$ عين الدوال الأصلية للدوال المعطاة.

23 - f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\cos^4 x$

-1 احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ ثم عبر عن $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\sin(2x)$

-2 استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

24 - f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{3x}\sin x$

-1 احسب $f'(x)$ و $f''(x)$

-2 أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من اجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x)=af'(x)+bf''(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

25 - نضع $F(x)=\int_0^x\frac{-3}{\sqrt{t^2+5}}\,dt$

1) احسب $F(0)$ ، ثم احسب $F'(x)$

-2 ادرس تغيرات الدالة F ثم شكل جدول تغيراتها وعين إشارة $F(x)$

26 - نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x)\,dx}{1+2\sin x}$

احسب $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$ و $I+J$ ثم استنتج قيمة I .

27 - f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=(2-x)e^x$

بين انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x)+f''(x)=2f'(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(t)\,dt$

28 - نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}$

احسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج I و J

29 - نضع $f(t)=\int_0^t\frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dt$ مع $t\in[0,1[$

احسب التكامل $f(t)$ ثم عين نهاية $f(t)$ لما t يؤول إلى 1 بقيم صغرى.

30 - لتكن f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=x^2+2x$

احسب التكاملين $I=\int_{-1}^{2}|f(x)|\,dx$ و $J=\int_{-1}^{2}\left(x^2+2|x|\right)dx$

31 - احسب قيمة I باستعمال التكامل بالتجزئة في كل حالة من الحالات التالية :

1) $I=\int_1^2 t\,Ln\,t\,dt$ ، 2) $I=\int_0^{\pi}(t-2)\cos t\,dt$

3) $I=\int_0^1 (3t+1)e^{-t}\,dt$ ، 4) $I=\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$

5) $I=\int_0^1 (2t^2-t+1)e^{t}\,dt$ ، 6) $I=\int_0^1 (3t+1)e^{t}\,dt$

32 - لتكن التكاملات K ، I ، J بحيث:

$$K=\int_0^\pi e^x\cos(2x)\,dx \quad ، \quad I=\int_0^\pi e^x\cos^2 x\,dx \quad \text{و} \quad J=\int_0^\pi e^x\sin^2 x\,dx$$

1) باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين بين ان $K=\frac{e^\pi-1}{5}$

2) احسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج I و J

3) بالتعبير عن $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ بدلالة $\cos(2x)$ أوجد باستعمال K قيمة I و J

33 - f دالة معرفة على $]1,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=Ln(x+\sqrt{x^2-1})$

1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج قيمة $I=\int_{\sqrt2}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

2) نضع $J=\int_{\sqrt2}^2\sqrt{x^2-1}\,dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن $I+J$ بدلالة J

ثم استنتج قيمة J

34 - من أجل كل $x>0$ نعتبر التكاملين:

$$I_n=\int_0^x \sin^{2n}t\,dt \quad \text{و} \quad J_n=\int_0^x(\sin^{2n}t-\cos^2 t)\,dt \quad \text{مع} \quad n\in IN$$

1) أوجد علاقة بين J_n ، I_n و I_{n+1}

2) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب J_n بدلالة I_{n+1}

ثم استنتج علاقة تربط بين I_{n+1} و I_n

3) احسب I_0 ثم بين انه يمكن حساب I_1 و J_0

35 - ليكن المنحنى (γ) ذو المعادلة $y=\sin x$ مع $0\le x\le\pi$ و (Γ) المنحنى ذو المعادلة $y=ax^2+bx+c$

1) ارسم (γ) في معلم متعامد ومتجانس. نرمز بـ A إلى النقطة من (γ) بحيث المماس عندها يوازي $(x'x)$.

2) عين الأعداد a ، b ، c بحيث (Γ) يمر من المبدأ O ويقبل A كذروة له، ثم ارسم (Γ) على نفس المجال.

3) نقبل أن القطع المكافئ (Γ) يبقى فوق (γ) على المجال $[0,\pi]$ ، احسب مساحة الحيز المحصور بين هاذين المنحنيين.

36 - f دالة معرفة على IR بالعبارة $f(x)=1+x-xe^{-x^2+1}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ طول الوحدة $2cm$.

1) تحقق أن (γ) يقبل النقطة $I(1,0)$ كمركز تناظر له.

2) برهن أن (γ) يقبل مستقيم مقارب (d) عند $(+\infty)$، ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى (γ).

3) من أجل كل عدد حقيقي $\lambda\ge0$ ، $S(\lambda)$ هي المساحة بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحني (γ) و (d) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ و $x=\lambda$.

أ) عبر عن $S(\lambda)$ بدلالة λ.

ب) ما هي النهاية S للمساحة $S(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $(+\infty)$؟

جـ) عين العدد الحقيقي λ_0 بحيث لما $\lambda\ge\lambda_0$ يكون $|S-S(\lambda)|\le10^{-2}$.

37 - في معلم متعامد ومتجانس نعتبر القطع المكافئ (P) ذو المعادلة $y=16-x^2$ المرسوم على المجال $[-4,4]$. بتدوير P حول (oy) نحصل على مجسم دوراني (Σ).

1) ما هي طبيعة مقطع من (Σ) بمستو عمودي على (oy)؟

2) عبر بدلالة y حيث $16\ge y\ge0$ عن مساحة هذا القطع، ثم احسب مساحة (Σ).

38 - (U_n) متتالية معرفة على IN^* بـ $U_n=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}\,dt$

1) أ) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,2]$ حيث $f(t)=\frac{2t+3}{t+2}$

ب) استنتج أن $\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)\le U_n\le\frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$

جـ) بين أنه إذا كانت (U_n) تقبل نهاية ℓ فإن $3\le\ell\le\frac{7}{2}$

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي t من $[0,2]$ $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$

ثم استنتج قيمة I حيث $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}\,dt$

ب) بين أنه من أجل كل $t\in[0,2]$ يكون $1\le e^{\frac{t}{n}}\le e^{\frac{2}{n}}$ ثم استنتج أن $I\le U_n\le e^{\frac{2}{n}}\times I$ ثم تحقق أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم عين نهايتها ℓ.

39 . من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع $I_n=\int_1^e (Ln\,x)^n\,dx$

1) ا) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[1,e]$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون $(Ln\,x)^n-(Ln\,x)^{n+1} > 0$ ثم استنتج ان المتتالية (I_n) متناقصة

ب) تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $I_n \geq 0$ ثم استنتج ان المتتالية (I_n) متقاربة

2) ا) احسب I_1

ب) برهن باستعمال التكامل بالتجزئة انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $I_{n+1}=-e(n+1)I_n$ ثم استنتج القيم المضبوطة لـ I_2 ، I_3 و I_4

3) ا) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون ،
$(n+1)\,I_n \leq e$ ثم استنتج نهاية المتتالية (I_n)

ب) ما هي قيمة $n\,I_n+(I_n+I_{n+1})$ ؟ ثم استنتج نهاية المتتالية $(n\,I_n)$.

40 . نريد حصر التكامل $I=\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ بواسطة طريقة المستطيلات

1) ارسم التمثيل البياني للدالة $x \xrightarrow{f} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ على المجال $[0,3]$

2) نجزئ المجال $[0,3]$ إلى n مجال كل منها له نفس الطول حيث $n\geq1$

ا) بين ان مجموع مساحات المستطيلات الكبرى يكتب على الشكل : $U_n=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\times3\right)$

- بين أن مجموع مساحات المستطيلات الصغرى يكتب على الشكل:
$V_n=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\times3\right)$ حيث (U_n) و (V_n) تعرف متتاليتين من أجل $n\geq1$

ب) بين ان $U_n-V_n=\frac{3}{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3^2+1}}\right)$

ج) بين ان $U_n-V_n < \frac{7}{10\,n}$

د) استنتج قيمة n_0 بحيث من اجل كل $n\geq n_0$ يكون $0<U_n-V_n<10^{-2}$
وهذا باستعمال السؤال (ج)

و) أوجد الحصر للتكامل I الموافق للقيمة n_0

41 . من اجل كل x من $I=]0,+\infty[$ نضع $F(x)=\int_0^x Ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة F

2) ليكن a عدد حقيقي موجب تماما. تحقق أنه من أجل كل t من $[1,1+a]$ يكون $\frac{1}{1+a}\leq\frac{1}{t}\leq1$ واستنتج ان $\frac{a}{a+1}\leq Ln(a+1)\leq a$

3) استنتج من السؤال (2) ان $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leq F(x)\leq \int_0^x e^{-2t}dt$
ثم $\frac{1}{2}Ln(2)-\frac{1}{2}Ln\left(1+e^{-2x}\right)\leq F(x)\leq \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}$

4) نقبل أنه لما x يؤول إلى $(+\infty)$ فإن نهاية $F(x)$ هي عدد حقيقي نرمز له بـ ℓ بين ان $\frac{1}{2}Ln(2)\leq \ell\leq\frac{1}{2}$

5) من اجل كل عدد طبيعي n نضع $U_n=\int_n^{n+1} Ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$
برهن أن $0\leq U_n\leq Ln\left(1+e^{-2n}\right)$ ثم استنتج ان (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها

6) من اجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n=\sum_{k=1}^{n} U_k$

- عبر عن S_n بدلالة n و F ثم بين أن المتتالية (S_n) متقاربة ثم عين نهايتها .

42 . من اجل كل عدد طبيعي n نضع $f_n(x)=\frac{x^n}{x^2+x+1}$ و $I_n=\int_0^1 f_n(t)\,dt$

1) بين ان المتتالية (I_n) معرفة جيدا ثم ادرس اتجاه تغير (I_n)

2) باستعمال الحصر على المجال $[0,1]$ للدالتين $U: x\to 1+x+x^2$ و $x\to\frac{1}{x}$
بين ان $\frac{1}{3(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$ ثم استنتج تقارب المتتالية (I_n) .

43 . نعرف من اجل كل عدد طبيعي $n\geq1$ التكامل I_n بـ $I_n=\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$

1) احسب I_1 ثم تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq1$ يكون ،
$0\leq I_n\leq \frac{2^n}{n!}\left(e^2-1\right)$

2) باستعمال التكامل بالتجزئة بين انه من اجل كل $n\geq1$ يكون ،
$I_{n+1}=I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

3) برهن بالتراجع ان $e^2=1+\frac{2}{1!}+ \dots +\frac{2^n}{n!}+I_n$

4) أ) نضع من أجل كل $n \geq 1$ ، $U_n = \frac{2^n}{n!}$ احسب $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ يكون $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ يكون $0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

5) أ) استنتج نهاية المتتالية (U_n) ثم نهاية (I_n)

ب) تحقق أن $e^2 = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!}\right)$

44 - نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $I = [0,1]$ بـ $f(x) = -x^2 + 2x$ و $g(x) = \sqrt{x}$

1) ادرس تغيرات f ثم ارسم منحناها البياني على المجال I في معلم متعامد ومتجانس (طول الوحدة هو $10cm$) وحدد المماس للمنحنى عند كل من النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 1.

2) ارسم المنحنى الممثل للدالة g ثم حدد المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0

3) بين أن تكامل f و تكامل g على المجال I متساويين.

4) بين أن المعادلة $f(x) = g(x)$ على المجال $[0,1]$ تكافئ $(x-1)(x^2-3x+1) = 0$

5) استنتج أن المنحنيين لهما نقطة مشتركة فاصلتها α حيث $0 < \alpha < 1$

ب) احسب α ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين

6) احسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنيين.

45 - لتكن f_0 دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $f_0(x) = e^{-x}$ ومن أجل كل عدد حقيقي موجب تماما α ، f_α دالة معرفة كما يلي:

$f_\alpha(0) = 0$ و $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$ من أجل $x > 0$

(γ_α) المنحنى البياني للدالة f_α في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ طول الوحدة $(4cm)$

1) ادرس تغيرات الدالتين f_0 و f_1 وارسم (γ_0) ، (γ_1) في نفس المعلم.

2) نفرض أن $\alpha > 0$ و $\alpha \neq 1$ ، ادرس استمرار وقابلية اشتقاق f_α عند العدد $x_0 = 0$

3) ادرس تغيرات f_α.

4) ليكن $\alpha > 0$ ، ادرس الوضع النسبي لـ (γ_0) و (γ_α) على $]0,+\infty[$

5) ليكن α و β عددين حقيقيين بحيث $0 < \alpha < \beta$ ادرس الوضع النسبي لـ (γ_α) بالنسبة إلى (γ_β) على $]0,+\infty[$.

6) برهن أن جميع المنحنيات (γ_α) تمر من نقطة ثابتة عينها.

7) ارسم (γ_e) و $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ في نفس المعلم السابق.

8) نفرض أن $\alpha > 0$ و لتكن g_α اقتصار الدالة f_α على المجال $]\alpha,+\infty[$.

برهن أن g_α تقبل دالة عكسية g_α^{-1} عين جدول تغيراتها، ثم ارسم بيانها (خذ $\alpha = \frac{1}{2}$).

9) نضع $\alpha = n$ حيث n عدد طبيعي ولتكن h_n دالة معرفة على I كما يلي:

$$h_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$$

أ) احسب $h_0(x)$ و $h_1(x)$ من أجل كل x من $]0,+\infty[$

ب) بين أنه من أجل كل x من I يكون $h_n(x) = -x^n e^{-x} + n\,h_{n-1}(x)$

ج) عين الأعداد الحقيقية a_0 , a_1 , ..., a_n بحيث تكون الدالة K_n المعرفة بـ: $K_n(x) = e^{-x}(a_n x^n + ... + a_1 x + a_0)$ أصلية للدالة f_n على $[0,+\infty[$.

د) استنتج عبارة $h_n(x)$ بدلالة x و n .

هـ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\lim_{x \to +\infty} h_n(x) = n!$

46 - f_α دالة معرفة كما يلي $\begin{cases} f_\alpha(x) = (x-\alpha)[1 - Ln(x-\alpha)] \ , \ x > \alpha \\ f_\alpha(\alpha) = 0 \end{cases}$

وليكن (γ_α) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1) ادرس استمرار وقابلية اشتقاق f_α عند $\alpha = x_0$.

2) ادرس حسب قيم α تغيرات f_α ثم ادرس وجود المستقيمات المقاربة لـ (γ_α) ارسم (γ_0) .

3) برهن أن جميع المنحنيات (γ_α) هي صورة (γ_0) بواسطة انسحاب يطلب تعيينه.

ثم ارسم (γ_1) و (γ_{-1}) في نفس المعلم.

4) احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (γ_0) والمستقيم ذا المعادلة $y = 2$ والمستقيمين ذوي المعادلتين $x = \lambda$ و $x = e$ حيث $\lambda < e$ ثم أحسب $\lim_{\lambda \to 0} S(\lambda)$

47 - أ) g دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بالعبارة $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - Ln(x^2+1)$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم حدد النهاية عند $(+\infty)$ واستنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,+\infty[$ وتحقق أن $\frac{7}{4} < \alpha < 2$

2) (Γ) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ومتجانس

أ) اكتب معادلة المماس (T) لـ (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

ب) (T) يقطع المحور (ox) في نقطة فاصلتها x_0 ، احسب القيمة المضبوطة لـ x_0 .

V_1 و V_2 هما القيمتين التقريبية بتقريب 10^{-3} لـ x_0 .